ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଓ ପ୍ରକାଶିତ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ପ୍ରଫେସର ଡକ୍ଟର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ (ସମୀକ୍ଷକ)

ଡକ୍ଟର ରଜନୀ ବଲ୍ଲଭ ଦାସ

ଡକ୍ଟର ଧିରେନ୍ଦ୍ର କୁମାର ଦଳାଇ

ଶ୍ରୀ ବିଶ୍ୱନାଥ ସାହୁ

ଡକ୍ଟର ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର (ଲେଖକ ଓ ସଂଯୋଜକ)

ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାଶ : **୨୦୧୩**

୨୦୧୯

ଆର୍ଟପୁଲ୍ : **ଗ୍ରାଫ୍ ଏନ୍ ଗ୍ରାଫିକ୍ସ,** ଓଡ଼ିଆ ବଜାର, କଟକ

ମୁଦ୍ରଣ :

ମୂଲ୍ୟ :

ମୁଖବନ୍ଧ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ – ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ବୀଜଗଣିତ ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ବୀଜଗଣିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, State Curriculum Framework-2007 ଅନୁଯାୟୀ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ପ୍ରକାଶ ଥାଉ କି, 2012-13 ଶିକ୍ଷାବର୍ଷ ପାଇଁ ଉକ୍ତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମିତ୍ତ ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଯାଇଛି ।

ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ଆନ୍ତରିକ ସହଯୋଗ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ, ସମୀକ୍ଷକ ଓ ସଂଯୋଜକଙ୍କୁ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଉଛି । ଆଶା କରୁଛି, ପୁସ୍ତକଟି ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ତଥା ଶିକ୍ଷକ–ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆଦୃତ ହେବ ।

ସଭାପତି

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଆଜିର ବିଜ୍ଞାନ-ଯୁଗରେ ଗଣିତହିଁ ମଣିଷର ଜୀବନଧାରାକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିୟନ୍ତ୍ରଣ କରୁଛି, ଏକଥା କହିଲେ ଅତ୍ୟୁକ୍ତି ହେବ ନାହିଁ । ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଗବେଷଣାଜନିତ ଜ୍ଞାନ ଗଣିତକୁ ନୂଆ ମୋଡ଼ ଦେବାରେ ଲାଗିଛି । ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ମଧ୍ୟ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ତଥା ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଆସିବା ସ୍ୱାଭାବିକ ।

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ଏବଂ State Curriculum Framework-2007 କୁ ନେଇ ପ୍ରସ୍ତୁତ Syllabusକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଗଣିତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା(Syllabus)ର ସମୟୋପଯୋଗୀ ନବୀକରଣ କରିଛନ୍ତି । ଏହି ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ** ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ଗଣିତ ପ୍ରତି ଆଗ୍ରହ ସୃଷ୍ଟି ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାର ଏକ ମୁଖ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ ଓ ଏହି ଲକ୍ଷ୍ୟ ପୂରଣ ନିମିତ୍ତ ପୁସ୍ତକଟିର ଭାଷା, ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀ ତଥା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ସୁସଂଗଠିତ କରାଯାଇଛି । ପୁସ୍ତକ ରଚନା ସମୟରେ ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ଲକ୍ଷ୍ୟ ସହ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କର ବୟସ ଓ ବୌଦ୍ଧିକ ବିକାଶକୁ ଯଥାସମ୍ଭବ ଧ୍ୟାନ ଦିଆଯିବାର ଚେଷ୍ଟା କରାଯାଇଛି । ଅଭ୍ୟାସ ନିମିତ୍ତ ଅଧିକ ସୁଯୋଗ ସୃଷ୍ଟି କରିବା ଲାଗି ବହୁସଂଖ୍ୟକ ଉଦାହରଣ ଦିଆଯିବା ସଂଗେ ସଂଗେ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଚିନ୍ତାମୂଳକ ପ୍ରଶ୍ନ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି ।

ପୁସ୍ତକଟିକୁ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ କରିବାର ସମସ୍ତ ଉଦ୍ୟମ କରାଯାଇଥିବା ସତ୍ତ୍ୱେ, ଯଦି ଏଥିରେ କୌଣସି ମୁଦ୍ରଣଜନିତ, ଭାଷାଗତ ବା ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ, ସେଥିପ୍ରତି କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରାଗଲେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂସ୍କରଣରେ ତାହାର ସଂଶୋଧନ କରାଯିବ ।

ଆଶା କରୁ ପୁସ୍ତକଟି ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଅଧ୍ୟାପନା କାର୍ଯ୍ୟରେ ସହାୟକ ହେବ ।

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ

ସୂଚୀ

T23XPQ

ଭାରତର ସମ୍ବିଧାନ

ପ୍ରାକ୍ କଥନ :

ଆମେ ଭାରତବାସୀ ଭାରତକୁ ଏକ ସାର୍ବଭୌମ, ସମାଜବାଦୀ, ଧର୍ମ ନିରପେକ୍ଷ, ଗଣତାନ୍ତ୍ରିକ ସାଧାରଣତନ୍ତ୍ର ରୂପେ ଗଠନ କରିବା ପାଇଁ ଦୃଢ଼ ସଂକଳ୍ପ ନେଇ ଓ ଏହାର ସମସ୍ତ ନାଗରିକଙ୍କୁ

- ସାମାଜିକ, ଅର୍ଥନୈତିକ ଓ ରାଜନୈତିକ ନ୍ୟାୟ ;
- ଚିନ୍ତା, ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି, ପ୍ରତ୍ୟୟ, ଧର୍ମୀୟ ବିଶ୍ୱାସ ଏବଂ ଉପାସନାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା;
- ସ୍ଥିତି ଓ ସୁବିଧା ସୁଯୋଗର ସମାନତାର ସୁରକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବାକୁ ତଥା
- ବ୍ୟକ୍ତି ମର୍ଯ୍ୟାଦା ଏବଂ ରାଷ୍ଟ୍ରର ଐକ୍ୟ ଓ ସଂହତି ନିଶ୍ଚିତ କରି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ

ଭ୍ରାତୃଭାବ ଉତ୍ସାହିତ କରିବାକୁ

ଏହି ୧୯୪୯ ମସିହା ନଭେମ୍ବର ୨୬ ତାରିଖ ଦିନ

ଆମର ସଂବିଧାନ ପ୍ରଣୟନ ସଭାରେ ଏତଦ୍ୱାରା

ଏହି ସମ୍ବିଧାନକୁ ଗ୍ରହଣ ଓ ପ୍ରଣୟନ କରୁଅଛୁ ଏବଂ ଆମ ନିଜକୁ ଅର୍ପଣ କରୁଅଛୁ ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ (କ)

୫୧(କ) ଧାରା : ମୌଳିକ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ

ଭାରତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକଙ୍କର କର୍ତ୍ତବ୍ୟ –

(କ) ସମ୍ବିଧାନକୁ ମାନି ଚଳିବା ଏବଂ ଏହାର ଆଦର୍ଶ ଓ ଅନୁଷ୍ଠାନମାନଙ୍କୁ ଏବଂ ଜାତୀୟ ପତାକା ଓ ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଖ) ଯେଉଁସବୁ ମହନୀୟ ଆଦର୍ଶ ଆମ ଜାତୀୟ ସ୍ୱାଧୀନତା ସଂଗ୍ରାମକୁ ଅନୁପ୍ରାଣିତ କରିଥିଲା, ତାହାକୁ ସ୍ମରଣ ଓ ଅନୁସରଣ କରିବା;

(ଗ) ଭାରତର ସାର୍ବଭୌମତ୍ୱ, ଏକତା ଓ ସଂହତି ବଜାୟ ଏବଂ ସୁରକ୍ଷିତ ରଖିବା;

(ଘ) ଦେଶର ପ୍ରତିରକ୍ଷା କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଜାତୀୟ ସେବା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ଙ) ଧର୍ମଗତ, ଭାଷାଗତ ଏବଂ ଆଞ୍ଚଳିକ କିମ୍ବା ଗୋଷ୍ଠୀଗତ ବିଭିନ୍ନତାକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ଭାରତର ଜନସାଧାରଣଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଐକ୍ୟ ଓ ଭ୍ରାତୃଭାବ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଏବଂ ନାରୀଜାତିର ମର୍ଯ୍ୟାଦାହାନୀସୂଚକ ବ୍ୟବହାର ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଚ) ଆମର ସଂସ୍କୃତିର ମୂଲ୍ୟବାନ ଐତିହ୍ୟକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ ଓ ସଂରକ୍ଷଣ କରିବା;

(ଛ) ଅରଣ୍ୟ, ହ୍ରଦ, ନଦୀ, ବନ୍ୟପ୍ରାଣୀ ସମେତ ପ୍ରାକୃତିକ ପରିବେଶର ସୁରକ୍ଷା ଓ ଉନ୍ନତି କରିବା ଏବଂ ଜୀବଜଗତ ପ୍ରତି ଅନୁକମ୍ପା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଜ) ବୈଜ୍ଞାନିକ ମନୋଭାବ, ମାନବବାଦ ଏବଂ ଅନୁସନ୍ଧିତ୍ସା ଓ ସଂସ୍କାର ମନୋଭାବ ପୋଷଣ କରିବା;

(ଝ) ସର୍ବସାଧାରଣ ସମ୍ପତ୍ତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା ଓ ହିଂସା ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଞ) ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଓ ସମଷ୍ଟିଗତ କାର୍ଯ୍ୟାବଳୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିବା, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମ ଦେଶ ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଓ କୃତିତ୍ୱର ଉଚ୍ଚତର ସୋପାନକୁ ଅବିରତ ଉନ୍ନତି କରିପାରିବ;

(ଟ) ମାତା ବା ପିତା ବା ଅଭିଭାବକ, ତାଙ୍କର ଛଅ ବର୍ଷରୁ ଚଉଦ ବର୍ଷ ବୟସ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସନ୍ତାନ ବା ପାଳିତଙ୍କୁ ଶିକ୍ଷାଲାଭର ସୁଯୋଗ ଯୋଗାଇ ଦେବା ।

ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସରଳ ସହସମୀକରଣ

(LINEAR SIMULTANEOUS EQUATIONS)

T2CTRD

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ରେ ସରଳ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ ହେଉଛି $ax + b = 0$, ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ । ଏଠାରେ a ଓ b ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ a କୁ x ର ସହଗ (coefficient) ଓ b କୁ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ (ମୂଳ) $-\frac{b}{a}$ ବୋଲି ଅମେ ଜାଣିଛେ । ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେ ଗୋଟିଏ ସରଳ ସମୀକରଣ (ଏକଘାତୀ)ର ସାଧାରଣ ରୂପ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(1)

ଯେଉଁଠାରେ a_1 ଓ b_1 ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗ ଓ c_1 ଧ୍ରୁବକ ରାଶି ଏବଂ a_1 b_1 ଓ c_1 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି । ଏଠାରେ a_1 ଓ b_1 ସହଗଦ୍ୱୟ ଉଭୟ ଶୂନ ନୁହନ୍ତି ।

ସମୀକରଣ (1) ର ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପ xy ସମତଳ (ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଏହି ବିଷୟଟିର ଆଲୋଚନା ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀର ବୀଜଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ରେ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 5.3 ରେ କରାଯାଇଛି । x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ଏହାର ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟ ପାଇଁ ନିତାନ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ ।

x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ (1)ର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମକୁ ସମୀକରଣ (1) ବ୍ୟତୀତ ଆଉ ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ଯଥା -

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ....(2)

ଯେଉଁଠାରେ a_2 , b_2 ଓ c_2 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି । ଏଠାରେ x ଓ y ସହଗ a_2 , b_2 ଦ୍ୱୟ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି । c_2 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି ।

ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ସହ ଜଡ଼ିତ କେତେକ ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନରେ ଉକ୍ତ ଏକଘାତୀ ସହ-ସମୀକରଣର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । କେତେକ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଶେଷ ଭାଗରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

1.2 ସହ-ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Geometrical Representation) :

ମନେକର ଦତ୍ତ ଏକ ଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ......(1)

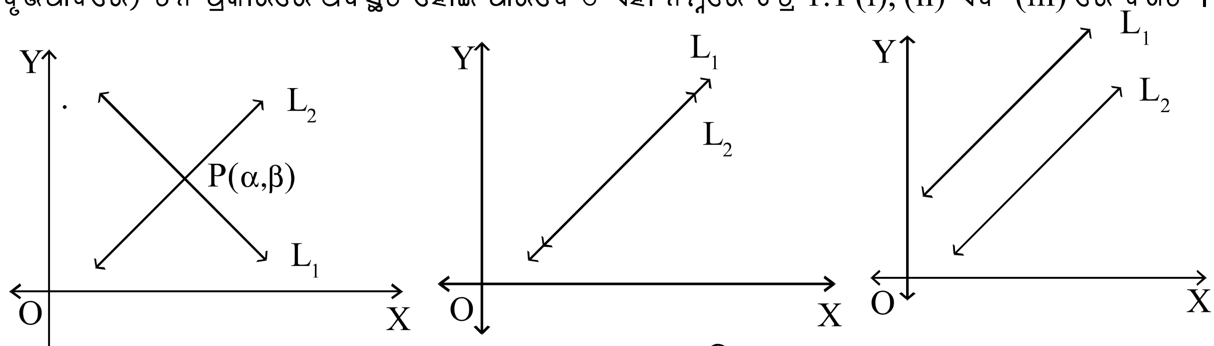
$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ......(2)

ଯେଉଁଠାରେ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ ଏବଂ $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ a_1, b_1 ଏବଂ a_2, b_2 ଏକ ସଙ୍ଗେ 0 ସହ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

ମନେକର ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ର ଲେଖଚିତ୍ର (ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ xy- ସମତଳ ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା) ଯଥାକ୍ରମେ L_1 ଓ L_2 ଭାବେ ନାମିତ । ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖିବା -

$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଏବଂ $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ, ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ xy- ସମତଳରେ (ମନେକର ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ) ତିନି ପ୍ରକାରରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇ ପାରିବେ ଓ ଏହା ନିମ୍ନରେ ଚିତ୍ର 1.1 (i), (ii) ଏବଂ (iii) ରେ ଦର୍ଶିତ ।



(L_1 ଓ L_2 ପରସ୍ପର ଛେଦୀ) (L_1 ଓ L_2 ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ) (L_1 ଓ L_2 ସମାନ୍ତର)

ଚିତ୍ର 1.1(i) **ଚିତ୍ର 1.1(ii)** **ଚିତ୍ର 1.1(iii)**

ଚିତ୍ର 1.1 (i) : L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ, ସେମାନଙ୍କର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଓ ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି ଉଭୟ L_1 ଓ L_2 ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହାର ସ୍ଥାନଙ୍କ (α,β) ଅର୍ଥାତ୍ $x = \alpha$ ଓ $y = \beta$ ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ସିଦ୍ଧ ହୁଅନ୍ତି ।

ବି.ଦ୍ର. : ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାଧାନ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ।

ଅତଏବ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ର କେବଳ **ଗୋଟିଏ (ଅନନ୍ୟ) ସମାଧାନ ରହିବ;** ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ହେବେ ।

ଚିତ୍ର 1.1(ii) : ଏଠାରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ (Coincident) ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅସଂଖ୍ୟ । ଅତଏବ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।**

ଚିତ୍ର 1.1 (iii) : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର । ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ହେବେ ନାହିଁ ।

ସହ ସମାକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳ ରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ହେଲେ, **ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।**

1.3 ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ (Solution of simultaneous equations by use of Graphs) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଗୋଟିଏ ସରଳସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର କିପରି ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ସେ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି କରାଯାଏ ସେ ସମ୍ପର୍କରେ ଆମର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

$x + 2y - 3 = 0$ .... (i) $\qquad$ $2x - y - 1 = 0$ .... (ii)

ସମାଧାନ : ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟରୁ y କୁ x ରୂପରେ (ଅଥବା x କୁ y ରୂପରେ) ପ୍ରକାଶ କଲେ,

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(3-x)$ .... (i)

$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x - 1$ .... (ii)

ସମୀକରଣ (i) ରେ x ର ମାନ 3 ଓ 1 ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

x	3	1
y	0	1

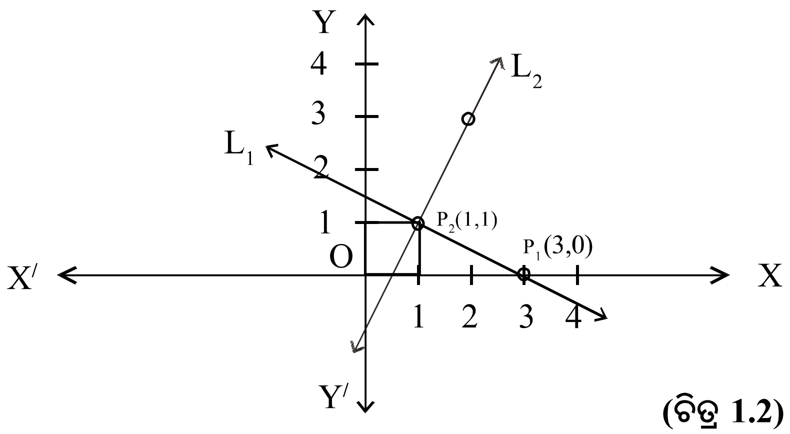
$\therefore$ P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (3,0) ଓ (1,1) ଅଟେ ।

ସେହିପରି ସମୀକରଣ (ii) ରେ x ର ମାନ 1 ଓ 2 ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

x	1	2
y	1	3

$\therefore$ Q_1 ଓ Q_2 ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1,1) ଓ (2,3) ଅଟେ ।

ଲେଖ କାଗଜରେ x ଓ y ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି L_1 ରେଖାପାଇଁ $P_1(3,0)$ ଓ $P_2(1,1)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ



(ଚିତ୍ର 1.2)

ସ୍ଥାପନ କର ଏବଂ L_2 ରେଖା ପାଇଁ $Q_1(1, 1)$ ଓ $Q_2(2, 3)$ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର । ଏହାପରେ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ (L_1) ଓ $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ (L_2) ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଚିହ୍ନଟ କର, ଯାହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ହେବ । $\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନଟି (1, 1) ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମତଳରେ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ ଏକ ସରଳରେଖାର ଲେଖଚିତ୍ର ପାଇଁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଆବଶ୍ୟକ; କିନ୍ତୁ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ନେଇ ସରଳରେଖାର ଅନନ୍ୟତା ଦର୍ଶାଇବା ବିଧେୟ ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ଲେଖ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମାଧାନ କର : $x - 2y - 7 = 0;\ x + y + 2 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ରୁ y ର x ରୂପ

$x - 2y - 7 = 0;$ କିମ୍ବା $y = \frac{1}{2}(x - 7)$ .... (i)

ଏବଂ $x + y + 2 = 0$ କିମ୍ବା $y = -2 - x$ .... (ii)

(i) ରେ x ର ଦୁଇଗୋଟି ମାନ ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ସ୍ଥିର କରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

x	–1	3
y	–4	–2

$P_1(-1, -4)$ ଏବଂ $P_2(3, -2)$

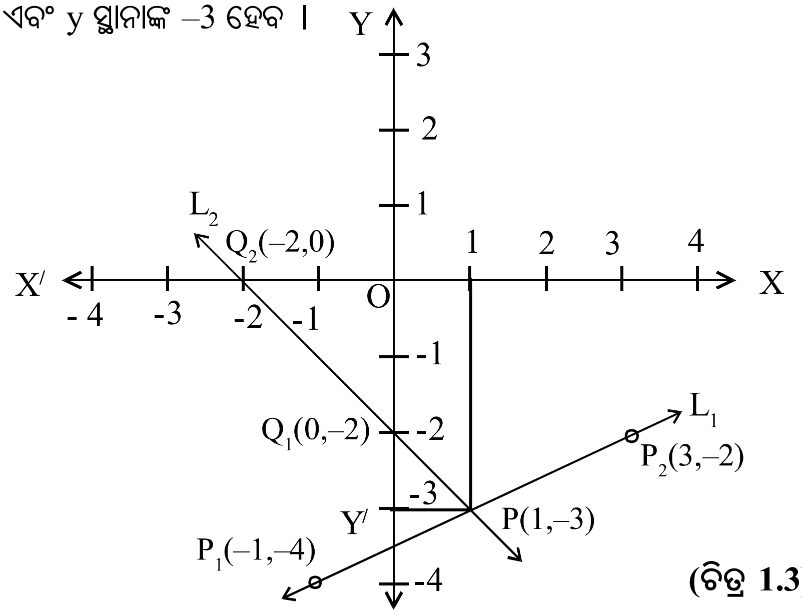
ସେହିପରି (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥିର କରିବା ।

x	0	–2
y	–2	0

$Q_1(0, -2)$ ଏବଂ $Q_2(-2, 0)$

ଲେଖ କାଗଜରେ x ଓ y ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି L_1 ରେଖାପାଇଁ $P_1(-1,4)$ ଓ $P_2(3,-2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର ଏବଂ L_2 ରେଖା ପାଇଁ $Q_1(0, -2)$ ଓ $Q_2(-2, 0)$ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର ।

ଏହାପରେ $\overleftrightarrow{P_1P_2}\,(L_1)$ ଓ $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}\,(L_2)$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଚିହ୍ନଟ କର, ଯାହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ଏବଂ y ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3 ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.3)

L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁଟି P(1,–3) ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $x = 1, y = -3$ ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନନ୍ୟ (ଏକମାତ୍ର) ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(a) $x + y - 3 = 0$ ଓ $2x + 2y - 6 = 0$, (b) $x + y - 3 = 0$ ଓ $x + y - 5 = 0$

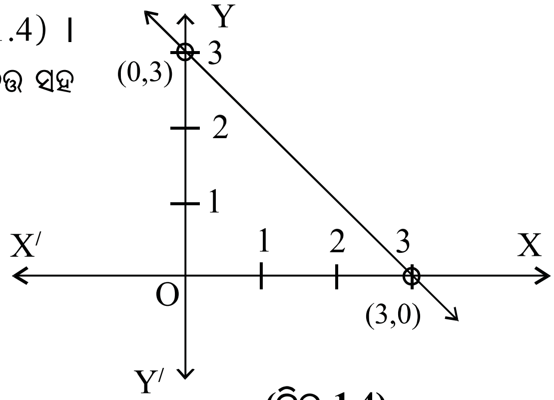
ସମାଧାନ : (a) ଏଠାରେ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ

$x + y - 3 = 0$.......... (i) ଓ $2x + 2y - 6 = 0$ ....(ii)

ସମୀକରଣ (ii) $\Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ (0,3) ଓ (3,0) ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେଉଛନ୍ତି । ସୁତରାଂ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

ଯେହେତୁ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 1.4) । ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଅସଂଖ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।



(ଚିତ୍ର 1.4)

(b) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $x + y - 3 = 0$

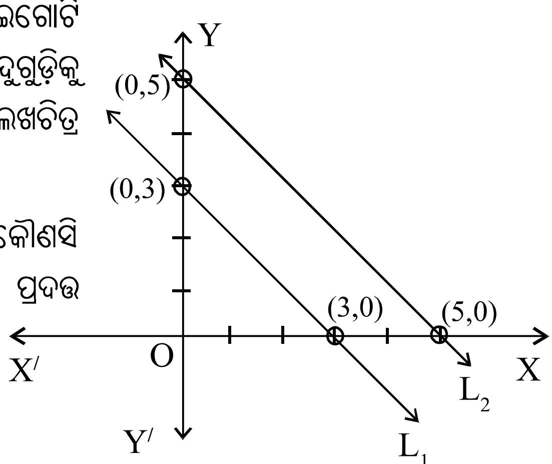
$\Rightarrow y = 3 - x$ .... (i)

$x + y - 5 = 0$

$\Rightarrow y = 5 - x$ .... (ii)

ପ୍ରଥମ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇ ଗୋଟି ସମାଧାନ (0, 3) ଓ (3, 0) ଏବଂ ସେହିପରି ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣର ଦୁଇଗୋଟି ସମାଧାନ (0, 5) ଓ (5, 0) । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ନେଇ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସଂସ୍ଥାପନ କରି ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମେ ଲେଖଚିତ୍ର 1.5 ପାଇବା ।

ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ହେତୁ ସେମାନଙ୍କର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ସୁତରାଂ (b) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ ।



(ଚିତ୍ର 1.5)

1.4 ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ

(Conditions of solvability of two linear simultaneous equations) :

ମନେକର ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ ଦୁଇଟି $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଯେଉଁ ଠାରେ a_1, b_1 ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି ଓ a_2, b_2 ମଧ୍ୟ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ -1 ଏବଂ ଉଦାହରଣ - 2 ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ମିଳୁଅଛି ।

ଉଦାହରଣ -1 ରୁ ପାଇବା - $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -3$ ଏବଂ $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = -1$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ସେହିପରି ଉଦାହରଣ - 2 କ୍ଷେତ୍ରରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$ ଓ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ଉପରୋକ୍ତ ଅନୁଶୀଳନରୁ ପାଇଲେ, ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ସହଗ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ଓ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି y ର ସହଗ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ଅସମାନ ହେଲେ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ଅନନ୍ୟ** ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ । କାରଣ ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ **ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର (Consistent and Independent)** ।

ଉଦାହରଣ 3(i) ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = -3$ ଏବଂ $a_2 = 2$, $b_2 = 2$, $c_2 = -6$

ଏଠାରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ଏବଂ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଉ ନଥିଲା ବେଳେ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ । କାରଣ ଲେଖଚିତ୍ରଦ୍ୱୟ **ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ** ଅଟନ୍ତି । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ **ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ (Consistent and Dependent)** ।

ଉଦାହରଣ 3(ii) ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -3$

$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = -5$

ଏଠାରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$ ଏବଂ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ଏବଂ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର କୌଣସି ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଉନାହିଁ । କାରଣ **ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର** ଅଟନ୍ତି । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ **ଅସଙ୍ଗତ (Inconsistent)** ।

ଉଦାହରଣ-1, ଉଦାହରଣ-2 ଓ ଉଦାହରଣ-3 ରୁ ପାଇଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ସନ୍ନିବେଶିତ ।

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2=0$ $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା	$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$	ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅନୁଯାୟୀ ସେମାନଙ୍କର ନାମକରଣ
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ	ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ ଅନନ୍ୟ (ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଏକମାତ୍ର ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାପତିତ ଅଥବା ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ	ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ (ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର	ଅସଙ୍ଗତ (ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମୀକରଣ $a_1x+b_1y = 0$ ଓ $a_2x+b_2y = 0$ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନଟି (0,0); ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ଓ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ; ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବଦା ସଙ୍ଗତ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 4

(i) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ $4x + ky + 8 = 0$, $2x + 2y + 2 = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର ଅନନ୍ୟ ସମାଧନ ସମ୍ଭବ ?

(ii) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $kx + 3y – (k–3) = 0$ ଓ $12x + ky – k = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ?

(iii) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $5x–3y = 0$ ଓ $2x + ky = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ?

ସମାଧାନ (i) ଏଠାରେ $a_1 = 4, b_1 = k$ ଓ $c_1= 8$, $a_2= 2, b_2 = 2$ ଓ $c_2 = 2$ ।

ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ : $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{k}{2} \Rightarrow k \neq 4$

$\therefore k = 4$ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

(ii) ଏଠାରେ $a_1 = k, b_1 = 3, c_1= –(k–3), a_2 = 12, b_2 = k, c_2 = –k$

ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{-(k-3)}{-k}$$

ପ୍ରଥମ ସମାନତା ରୁ $k^2 = 12 \times 3 \Rightarrow k = \pm 6$ ....(1)

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାନତା ରୁ $–3k = –k(k–3) \Rightarrow k^2 – 6k = 0 \Rightarrow k (k– 6) = 0 \Rightarrow k =0$ କିମ୍ବା $k = 6$

(1) ଓ (2) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $k = 6$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $k = -6$ ହେଲେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{2}$ ହେତୁ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବ ଓ $k \neq \pm 6$ ପାଇଁ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

(iii) ଏଠାରେ $a_1 = 5,\ b_1 = -3, a_2 = 2, b_2 = k$

ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବାର ସର୍ତ୍ତ : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{-3}{k}$

ଅର୍ଥାତ୍ $k = -\frac{6}{5}$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $x + y = 0$ ସମୀକରଣ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ----- [(4,5), (5,5), (–4, 4), (–4, 5)]

(ii) $x - 2y = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ----- [(4,2), (–4,2), (4, –2), (–4, –2)]

(iii) $2x + y + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ -----[(0,2), (2,0), (–2,0), (0, –2)]

(iv) $x - 4y + 1 = 0$ ହେଲେ x = ----- [$4y - 1$, $4y+1$, $-4y+1$, $-4y - 1$]

(v) $2x - y + 2 = 0$ ହେଲେ y = ----- [$2x - 2$, $2x+2$, $2x - 2$, $-2x - 2$]

(vi) $x - 2y + 3 = 0$ ହେଲେ y = ----- [$\frac{1}{2}(x+3)$, $-\frac{1}{2}(x-3)$, $-\frac{1}{2}(-x+3)$, $-\frac{1}{2}(x+3)$]

2. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଯୋଡ଼ିରୁ କେଉଁ ସମୀକରଣ ଯୋଡ଼ି କ୍ଷେତ୍ରରେ (i) ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ (ii) ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଏବଂ (iii) ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ?

(i) $x+y+1 = 0,\ x - y + 1 = 0,$ (ii) $x+y+1 = 0,\ 2x + 2y + 2 = 0$

(iii) $x+y+1 = 0,\ x + y + 3 = 0,$ (iv) $2x - y + 3 = 0,\ -4x + 2y - 6 = 0$

(v) $2x - y + 3 = 0, 2x + y - 3 = 0,$ (vi) $2x - y + 3 = 0, -6x + 3y + 5 = 0$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଯେ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $x - y = 0$ (ii) $x + y = 0$

(iii) $x - 2y = 0$ (iv) $x + 2y - 4 = 0$

(v) $x - 2y - 4 = 0$ (vi) $2x - y + 4 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଆବଶ୍ୟକ ।

(i) $kx + my + 4 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଂଗତ ହେଲେ $k : m$ କେତେ ?

(ii) $2x + 3y - 5 = 0$ ଓ $7x - 6y - 1 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ $(1, \beta)$ ହେଲେ β ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(iii) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ (1,1), ସମୀକରଣ $3x + ty - 6 = 0$ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ହେବ ?

(iv) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ (1,1), $tx - 2y - 10 = 0$ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ହେବ ?

(v) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $tx + 2y = 0$ ଓ $3x + ty = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ?

(vi) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $6x - 3y + 10 = 0$ ଓ $2x - y + 9 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ ।

(vii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x + 5y = 17$ ଏବଂ $5x + 3y = 14$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଂଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ।

(viii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $3x - 5y - 10 = 0$ ଏବଂ $6x - 10y = 20$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଛି ।

5. ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x + y - 4 = 0$ ଓ $x - y = 0$, (ii) $x - y = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$

(iii) $x + y = 0$ ଓ $-x + y - 2 = 0$, (iv) $2x + y - 3 = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$

(v) $3x + y + 2 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$, (vi) $x + 2y + 3 = 0$ ଓ $2x + y + 3 = 0$

(vii) $2x + y - 6 = 0$ ଓ $2x - y + 2 = 0$, (viii) $x + y - 1 = 0$ ଓ $2x + y - 8 = 0$

(ix) $3x + y - 11 = 0$ ଓ $x - y - 1 = 0$, (x) $2x - 3y - 5 = 0$ ଓ $-4x + 6y - 3 = 0$

(xi) $2x + y + 2 = 0$ ଓ $4x - y - 8 = 0$, (xii) $3x + 4y - 7 = 0$ ଓ $5x + 2y - 7 = 0$

6.(i) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x - 2y = 2$ ଏବଂ $4x - 4y - 8 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ ।

(ii) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x - 3y = 1$ ଏବଂ $3x - 4y = 1$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

(iii) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $9x + 3y + 12 = 0$ ଏବଂ $18x + 6y + 24 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଂଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ ।

(iv) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ $2x - y = 1$ ଏବଂ $x + 2y = 8$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକର y- ଛେଦାଂଶ ନିରୂପଣ କର ।

7. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ **k** ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $x - 2y - 3 = 0, 3x + ky - 1 = 0$, (ii) $kx - y - 2 = 0, 6x + 2y - 3 = 0$

(iii) $kx + 3y + 8 = 0, 12x + 5y - 2 = 0,$ (iv) $kx + 2y = 5, 3x + y = 1$

(v) $x - ky = 2, 3x + 2y + 5 = 0,$ (vi) $4x - ky = 5, 2x - 3y = 12$

8. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ **k** ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $7x - y - 5 = 0, 21x - 3y - k = 0,$ (ii) $8x + 2y - 9 = 0, kx + 10y - 18 = 0$

(iii) $kx - 2y + 6 = 0, 4x - 3y + 9 = 0,$ (iv) $2x + 3y = 5, 6x + ky = 15$

(v) $5x + 2y = k, 10x + 4y = 3,$ (vi) $kx - 2y - 6 = 0, 4x + 3y + 9 = 0$

9. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବେ ?

(i) $8x + 5y - 9 = 0, kx + 10y - 15 = 0,$ (ii) $kx - 5y - 2 = 0, 6x + 2y - 7 = 0$

(iii) $kx + 2y - 3 = 0, 5x + 5y - 7 = 0,$ (iv) $kx - y - 2 = 0, 6x - 2y - 3 = 0$

(v) $x + 2y - 5 = 0, 8x + ky - 10 = 0,$ (vi) $3x - 4y + 7 \;\; 0, kx + 3y - 5 = 0$

1.2. ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ବୀଜଗାଣିତିକ ସମାଧାନ :

ମନେକର ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \text{......................(1)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \text{......................(2)}$$

ଏ ଦୁଇ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ କିମ୍ବା ଲେଖଚିତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇ ପାରିବ। ପ୍ରଥମେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା କରିବା।

(i) ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପଦ୍ଧତି (Method of Substitution) : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ରୁ ଯେକୌଣସିଟିକୁ ନେଇ ସେଥିରେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ କିମ୍ବା y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। ମନେକର ସମୀକରଣ (1) କୁ ବିଚାର କରାଯାଇ y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ସମୀକରଣ (1)ରେ ଯଦି $b_1 \neq 0$ ତେବେ $b_1y = -c_2 - a_1x \Rightarrow y = \frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ ....(3)

(3) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ y ର ମାନ $\frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ମିଳିବ ଓ ଏହା

$$a_2x + \frac{b_2}{b_1}\{-c_1 - a_1x\} + c_2 = 0 \Rightarrow (a_2b_1 - a_1b_2)x + (c_2b_1 - c_1b_2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(c_2b_1 - c_1b_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \Rightarrow x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{......................(4)}$$

(4) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ x ର ମାନକୁ (1) କିମ୍ବା (2) ସମୀକରଣରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ପାଇବା

$$a_1\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.........} (5)$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.................}(6)$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି $a_1 \neq 0$ ହୁଏ ତେବେ ଅନୁରୂପ ଭାବେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରି ଅଗ୍ରସର ହେଲେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନ ମିଳିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 :

ସମାଧାନ କର : $5x + 2y + 2 = 0,\ 3x + 4y - 10 = 0$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$5x + 2y + 2 = 0 \quad \text{ଓ} \quad \text{.......................}(i)$$

$$3x + 4y - 10 = 0 \quad \text{.......................}(ii)$$

ସମୀକରଣ (i)କୁ ବିଚାର କରି y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଉ ।

$$\therefore 2y = -5x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-5x - 2) \quad \text{.......................}(iii)$$

(ii) ଓ (iii)ରୁ $3x + \frac{4}{2}(-5x - 2) - 10 = 0 \Rightarrow 6x + 4(-5x - 2) - 20 = 0$

$$\Rightarrow 6x - 20x - 8 - 20 = 0 \Rightarrow -14x - 28 = 0 \Rightarrow x = -2$$

ସମୀକରଣ (i)ରେ $x = -2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା $5(-2) + 2y + 2 = 0$

$$\Rightarrow 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $(-2, 4)$ ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟରେ $x = -2,\ y = 4$ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ $(-2, 4)$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେଉଛନ୍ତି ।

(II) ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି (Method of Elimination) :

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ (1) ଓ (2)ରୁ x କୁ କିମ୍ବା y କୁ ଅପସାରଣ କରାଯାଇଥାଏ । ମନେକର ଆମେ x କୁ ଅପସାରଣ କରିବା । ସମୀକରଣ (1)ରେ xର ସହଗ a_1କୁ ସମୀକରଣ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନକଲେ ଏବଂ ସମୀକରଣ (2)ରେ xର ସହଗ a_2କୁ ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା

$$a_2 \times (1) \Rightarrow a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \quad \text{.......................}(7)$$

$$a_1 \times (2) \Rightarrow a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \quad \text{.......................}(8)$$

ସମୀକରଣ (7) ଓ (8)ରେ xର ସହଗ ସମାନ। (7) ରୁ (8)କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\ y + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \Rightarrow y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ପରିଶେଷରେ yର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (1) [କିମ୍ବା ସମୀକରଣ (2)]ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ

$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଲବ୍ଧ ହେବ।

α ଓ β ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ହେଲେ, $\alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\beta = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ହେବ।

ଉଦାହରଣ - 6 :

ସମାଧାନ କର : $2x + 3y - 8 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$2x + 3y - 8 = 0 \quad \text{........................(i)}$$

$$3x + y - 5 = 0 \quad \text{........................(ii)}$$

$$3 \times \text{(i)} \Rightarrow 6x + 9y - 24 = 0 \quad \text{........................(iii)}$$

$$2 \times \text{(ii)} \Rightarrow 6x + 2y - 10 = 0 \quad \text{........................(iv)}$$

$$\quad - \quad - \quad +$$

$$\text{(iii)} - \text{(iv)} \Rightarrow 7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2$$

ସମୀକରଣ (i) ରେ $y = 2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା

$$2x + 6 - 8 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (1, 2). **(ଉତ୍ତର)**

(iii) ବଜ୍ର ଗୁଣନ (Cross Multiplication) :

ଆମର ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଦେଖିଛେ ଯେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ନିମନ୍ତେ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{.....................(1)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{.....................(2)}$$

$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଅଟେ।

ସମାଧାନରୁ ଆମକୁ ମିଳିବ

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{.....................(3)}$$

ଉପରେ (3)ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି ସମାନତାର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମାନ ହେତୁ (3)କୁ

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.....................(4)}$$

ରୂପରେ ଲେଖିହେବ। ଏଠାରେ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ।

ସମୀକରଣ (4)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଉକ୍ତିକୁ ବଜ୍ରଗୁଣନ କୁହାଯାଏ। ଏହାକୁ ସହଜରେ ମନେ ରଖିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଇଥାଏ।

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}}$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ x ଲବ ଥିବା ପଦର ହରରେ (b_1 ଗୁଣନ c_2) ଫେଡ଼ାଣ (c_1 ଗୁଣନ b_2) ହୁଏ। ସେହିପରି y ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ଓ 1 ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(1) $c_1 = c_2 = 0$ ଓ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ହେଲେ, $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନଟି (0, 0) ଅଟେ। ଏଠାରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ **ସମ ସହସମୀକରଣ (Homogeneous Simultaneous equation)** କୁହାଯାଏ। $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ଓ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ।

(2) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଇଥିଲେ ପ୍ରଥମେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ସର୍ତ୍ତଟି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଆବଶ୍ୟକ।

ଉଦାହରଣ - 7 :

ସମାଧାନ କର : $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ, $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର $2 \times 1 - 4(-3) = 2 + 12 = 14 \neq 0$ ତେଣୁ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ।

ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ,

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} -3 & -1 \\ 1 & -9 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -9 & 4 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(-3)(-9) - 1(-1)} = \frac{y}{(-1)4 - (-9)2} = \frac{1}{2 \times 1 - 4(-3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{27+1} = \frac{y}{-4+18} = \frac{1}{2+12} \Rightarrow \frac{x}{28} = \frac{y}{14} = \frac{1}{14} \Rightarrow x = \frac{28}{14} = 2, \quad y = \frac{14}{14} = 1$$

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1)। (ଉତ୍ତର)

1.4. ଅଣ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ $a_r x + b_r y + c_r = 0, r = 1, 2$ ....(1) ର ସମାଧାନ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ। ଅନେକ ସହ ସମୀକରଣ ଯାହାକି ଏକଘାତୀ ନୁହେଁ, ସେମାନଙ୍କୁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏକଘାତୀ ରୂପକୁ ଅଣାଯାଇ ପାରିବ ଓ ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଅବଲମ୍ବନରେ ସମାଧାନ କରିହେବ। ମାତ୍ର ଏପରି ଆମେ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ କରି ପାରିବା ନାହିଁ। କେତେଗୁଡ଼ିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏପରି କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଉଦାହରଣ - 8 :

ସମାଧାନ କର : $6x + 3y = 7xy,\ 3x + 9y = 11xy\ (x \neq 0,\ y \neq 0)$

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଏକଘାତୀ ନୁହଁନ୍ତି। କିନ୍ତୁ ଉଭୟ ସମୀକରଣର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ xy ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ($\because\ x \neq 0$ ଓ $y \neq 0$ ତେବେ $xy \neq 0$)

$$\frac{6}{y}+\frac{3}{x} = 7,\quad \frac{3}{y}+\frac{9}{x} = 11$$

ଏଠାରେ $\frac{1}{x} = \upsilon$ ଓ $\frac{1}{y} = v$ ଲେଖିଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ

$$3\upsilon + 6v - 7 = 0 \text{ ଏବଂ } 9\upsilon + 3v - 11 = 0$$

(ଏଠାରେ $3x3 - 9\ x\ 6 = -45 \neq 0$)

ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା
$$\frac{\upsilon}{\begin{matrix}6 & -7\\ 3 & -11\end{matrix}} = \frac{v}{\begin{matrix}-7 & 3\\ -11 & 9\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}3 & 6\\ 9 & 3\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{-66+21} = \frac{v}{-63+33} = \frac{1}{9-54} \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{-45} = \frac{v}{-30} = \frac{1}{-45}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = \frac{-45}{-45} = 1 \text{ ଓ } v = \frac{-30}{-45} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \text{ ଓ } \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1 \text{ ଓ } y = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 :

ସମାଧାନ କର : $\frac{1}{2(2x+3y)} + \frac{12}{7(3x-2y)} = \frac{1}{2},\ \frac{7}{2x+3y} + \frac{4}{3x-2y} = 2$

ସମାଧାନ :

ମନେକର $\upsilon = \frac{1}{2x+3y}$ ଓ $v = \frac{1}{3x-2y}$ .... (i)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ $\frac{1}{2}\upsilon + \frac{12}{7}\nu = \frac{1}{2}$, $7\upsilon + 4\nu = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ $7\upsilon + 24\nu - 7 = 0$ (ii)

$7\upsilon + 4\nu - 2 = 0$ (iii)

(ii) – (iii) $\Rightarrow 20\nu - 5 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $3x - 2y = 4$ (iv)

(iii)ରେ $\nu = \frac{1}{4}$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $7\upsilon + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{7}$

$\therefore$ $2x + 3y = 7$ (v)

2(iv) – 3(v) $\Rightarrow 2(3x - 2y) - 3(2x + 3y) = 8 - 21$

$\Rightarrow -13y = -13 \Rightarrow y = 1$

(iv) ରେ $y = 1$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $3x - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1) ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ବିଶେଷ ଆଲୋଚନା :

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରଟିକୁ ବିଚାର କର : $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ଏହି ଚିତ୍ରରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଗୋଟି ଧାଡ଼ି (row) ଓ ଦୁଇଗୋଟି ସ୍ତମ୍ଭ (Column)ରେ ଲେଖାଯାଇଛି ଓ ସମସ୍ତ ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଟି ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ରଖାଯାଇଛି । ଏହାକୁ A ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଇଛି । ଏଠାରେ A କୁ ଏକ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Matrix) କୁହାଯାଏ । ଆମେ ମଧ୍ୟ 3 x 3, 4 x 4 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଲେଖିପାରିବା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର ବହୁଳ ଭାବେ କରାଯାଏ । ଯେହେତୁ ଏଠାରେ ଧାଡ଼ିସଂଖ୍ୟା ସହ ସ୍ତମ୍ଭସଂଖ୍ୟା ସମାନ, ତେଣୁ ଏହି ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକୁ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Square matrix) କୁହାଯାଏ । କେବଳ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏଠାରେ ବିଚାର କରାଯାଉଛି । ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ସଂପୃକ୍ତ ଓ ଏହାକୁ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ (determinant) କୁହାଯାଏ । ଯଦି ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ହୁଏ ତେବେ ଏହାର ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ହେଲେ

$|A| = 5 \times 1 - 7 \times 2 = 5 - 14 = -9$ ଅଟେ ।

ସେହିପରି, $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 0 \times (-4) = 3 - 0 = 3$;

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 6 + 1 = 7$

ଆମେ ଦେଖିଛେ ଯେ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow a_1x + b_1y = -c_1$ ଏବଂ
$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow a_2x + b_2y = -c_2$

$a_1, b_1, -c_1, a_2, b_2, -c_2$ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ତିନିଗୋଟି ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ ବିଚାର କର :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}\quad \text{ଏବଂ} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

[Δର ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଧ୍ରୁବକ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ବଦଳାଇଲେ] [Δର ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଧ୍ରୁବକ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ବଦଳାଇଲେ]

ଯେଉଁଠାରେ $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = -c_1b_2 - b_1(-c_2) = b_1c_2 - b_2c_1$, $\Delta_y = -a_1c_2 - a_2(-c_1) = c_1a_2 - c_2a_1$

ଅତଏବ ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ :

$x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ ଯେଉଁଠାରେ $\Delta \neq 0$ କାରଣ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ଲବ୍ଧ ସମାଧାନକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖିଲେ,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\Delta_x} = \frac{y}{\Delta_y} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

ଏହାକୁ ସୁପରିଚିତ Cramer's ନିୟମ କୁହାଯାଏ । ବଜ୍ରଗୁଣନ ସୂତ୍ର ହିଁ Cramer's Rule ର ଅନ୍ୟରୂପ ।

ଉଦାହରଣ - 10 :

Cramer ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

$x + 2y = -1$ ଓ $2x - 3y = 12$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - 2 \times 2 = -3 - 4 = -7 \quad \therefore \Delta \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-3) - 2 \times 12 = 3 - 24 = -21$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 1 \times 12 - 2 \times (-1) = 12 + 2 = 14$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-21}{-7} = 3,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : $(x, y) = (3, -2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

   (i) $x + y - 8 = 0,\ 2x - 3y - 1 = 0$
   (ii) $3x + 2y - 5 = 0,\ x - 3y - 9 = 0$
   (iii) $2x - 5y + 8 = 0,\ x - 4y + 7 = 0$
   (iv) $11x + 15y + 23 = 0,\ 7x - 2y - 20 = 0$
   (v) $ax + by - a + b = 0,\ bx - ay - a - b = 0$
   (vi) $x + y - a = 0,\ ax + by - b^2 = 0$

2. ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣ ମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର ।

   (i) $x - y - 3 = 0,\ 3x - 2y - 10 = 0$
   (ii) $3x + 4y = 10,\ 2x - 2y = 2$
   (iii) $3x - 5y - 4 = 0,\ 9x = 2y - 1$
   (iv) $0.4x - 1.5y = 6.5,\ 0.3x + 0.2y = 0.9$
   (v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0,\ \sqrt{5}x + \sqrt{2}y = 0$
   (vi) $ax + by = 0,\ x + y - c = 0\ (a+b \neq 0)$

3. ବଜ୍ରଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର ।

   (i) $x + 2y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 12 = 0$
   (ii) $2x + 5y = 1,\ 2x + 3y = 3$
   (iii) $x + 6y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 8 = 0$
   (iv) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b,\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$
   (v) $x + 6y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 8 = 0$
   (vi) $4x - 9y = 0,\ 3x + 2y - 35 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର ।

   (i) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 17,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$
   (ii) $\frac{5}{x} + 6y = 13,\ \frac{3}{x} + 20y = 35$ $(x \neq 0)$
   (iii) $2x - \frac{3}{y} = 9,\ 3x + \frac{7}{y} = 2$ $(y \neq 0)$
   (iv) $4x + 6y = 3xy,\ 8x + 9y = 5xy$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$
   (v) $(a-b)\,x + (a+b)\,y = a^2 - 2ab - b^2$, $(a+b)\,x + (a+b)y = a^2 + b^2$
   (vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2,\ ax - by = a^2 - b^2$

(vii) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} + 1 = 0$ (viii) $\frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5}, \frac{xy}{y-x} = 6$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} - 10 = 0$ $(x + y \neq 0, x - y \neq 0)$

(ix) $6x + 5y = 7x + 3y + 1 = 2(x + 6y - 1)$

(x) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x+y-12}{11}$

(xi) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8, \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11$ (xii) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, ax + by = a^2 + b^2$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$

6. Cramer ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର :

(i) $2x + 3y = 5, 3x + y = 4$ (ii) $x + y = 3, 2x + 3y = 8$

(iii) $x - y = 0, 2x + y = 3$ (iv) $2x - y = 3, x - 3y = -1$

1.7 ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ପ୍ରୟୋଗ

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଅନେକ ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରିଛେ । ସେହିପରି ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗରେ ଜଟିଳ ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସହଜ ସମାଧାନ କିପରି କରିପାରିବା, ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏଥିପାଇଁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 11 : ପିତାଙ୍କ ବୟସର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ସମଷ୍ଟି 105 ବର୍ଷ । ମାତ୍ର ପିତାଙ୍କ ବୟସ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ଦୁଇଗୁଣର ସମଷ୍ଟି 75 ବର୍ଷ । ତେବେ ପିତା ଓ ପୁତ୍ରଙ୍କ ବୟସ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପିତାଙ୍କ ବୟସ = x ଵ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = y ବର୍ଷ

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $2x + y = 105$ ଓ $x + 2y = 75$

$\therefore$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ $2x + y - 105 = 0$ ଓ $x + 2y - 75 = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $\frac{x}{1 \times (-75) - 2 \times (-105)} = \frac{y}{-105 \times 1 - (-75) \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 - 1 \times 1}$

$\Rightarrow \frac{x}{135} = \frac{y}{45} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{135}{3} = 45$ ଓ $y = \frac{45}{3} = 15$

$\therefore$ ପିତାଙ୍କ ବୟସ = 45 ବର୍ଷ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = 15 ବର୍ଷ ।

ଉଦାହରଣ - 12 : ଦୁଇଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 12 । ସଂଖ୍ୟାଟିର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ ତାହା ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା ଠାରୁ 18 ଅଧିକ । ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟିର ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ = x ଓ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ = y

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି = $10x + y$ ଓ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାଟି = $10y+x$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $x + y = 12$ ....(i) ଏବଂ

$(10y+x) - (10x + y) = 18 \Rightarrow 9y - 9x - 18 \Rightarrow y - x = 2$ ..... (ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗ କଲେ ପାଇବା $2y = 14 \Rightarrow y = 7$

y ର ମୂଲ୍ୟ ସମୀକରଣ (i) ରେ ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା $x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି = 57 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବ ଓ ହର ଉଭୟ ରେ 1 ଯୋଗକଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{4}{5}$ ହୁଏ । ଯଦି ଲବ ଓ ହର ଉଭୟରୁ 5 ବିୟୋଗ କଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{1}{2}$ ହୁଏ, ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି କେତେ ?

ସାମାଧାନ : ମନେକର ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{x}{y}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ଏବଂ $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 5x + 5 = 4y + 4$ ଏବଂ $2x - 10 = y - 5$

$\Rightarrow 5x - 4y + 1 = 0$ .... (i) ଓ $2x - y - 5 = 0$ .... (ii)

ସମୀକରଣ (i) $\Rightarrow 5x - 4y + 1 = 0$ .... (iii)

ସମୀକରଣ (ii) x 4 $\Rightarrow 8x - 4y - 20 = 0$ .... (iv)

ସମୀକରଣ (iii) ରୁ ସମୀକରଣ (iv) ବିୟୋଗ କଲେ, $-3x + 21 = 0 \Rightarrow x = 7$

x ର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (i) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $5 \times 7 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 4y = 36 \Rightarrow y = 9$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭଗ୍ନାଂଶଟି = $\frac{7}{9}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : 8 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 10 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । 6 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 8 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଉକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 14 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରିଲେ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ଜଣେ ପୁରୁଷ x ଦିନରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ y ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବେ ।

ତେବେ ଜଣେ ପୁରୁଷ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{x}$ ଅଂଶ କରିପାରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ $\frac{1}{y}$ ଅଂଶ କରିପାରେ । ମାତ୍ର 8 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{10}$ ଅଂଶ ଏବଂ ଜଣେ ପୁରୁଷ ଓ 6 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{14}$ ଅଂଶ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{8}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{10}$, $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{1}{14}$

$\frac{1}{x}$ = υ ଓ $\frac{1}{y}$ = ν ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ ପାଇବା–

$$80\upsilon + 120\nu - 1 = 0 \text{ ଏବଂ } 84\upsilon + 112\nu - 1 = 0$$

ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କଲେ

$$\frac{\upsilon}{120(-1)-112(-1)}=\frac{\nu}{84(-1)-80(-1)}=\frac{1}{80\times112-120\times84}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{-8}=\frac{\nu}{-4}=\frac{1}{-1120} \Rightarrow \upsilon=\frac{8}{1120}=\frac{1}{140} \text{ ଓ } \nu=\frac{4}{1120}=\frac{1}{280}$$

$\Rightarrow x = 140$ ଓ $y = 280$

∴ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ 280 ଦିନରେ ସମାପ୍ତ କରିପାରିବ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ x ଓ y । ∴ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ $\frac{1}{x}$ ଓ $\frac{1}{y}$ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $x + y = 15$............ (i) ଏବଂ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$ .... (ii)

$\Rightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{xy}=\frac{3}{10}$ ((i) ର ବ୍ୟବହାର ହେତୁ)

$\Rightarrow xy = \frac{15\times10}{3} = 50$

କିନ୍ତୁ $x - y = \pm\sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \pm\sqrt{15^2 - 4\times50} = \pm\sqrt{25} = \pm5$

∴ $x - y = 5$ .... (iii) କିମ୍ବା $x - y = -5$ .... (iv)

(i) ଓ (iii) କୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $x = 10, y = 5$

କିମ୍ବା (i) ଓ (iv) କୁ ସମାଧାନ କଲେ $x = 5$ ଓ $y = 10$

ସୁତରାଂ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ 10 ଓ 5 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (c)

1. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 137 ଓ ସେମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ ଫଳ 43 । ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିରୁପଣ କର ।

2. ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $x + 4$ ସେ.ମି., $4x-y$ ସେ.ମି. ଓ $y+2$ ସେ.ମି. ହେଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

3. ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର $AB = 3x + y$ ସେ.ମି., $BC = 3x + 2$ ସେ.ମି., $CD = 3y - 2x$ ସେ.ମି. ଓ $DA = y + 3$ ସେ.ମି. ହେଲେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୁପଣ କର ।

4. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଯୋଗ ଫଳର 4 ଗୁଣ । କିନ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 18 ଯୋଗ କଲେ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳି ଯାଏ । ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

5. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ତାହାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ, ସେ ଦୁହିଁଙ୍କର ଯୋଗଫଳ 99 ଓ . ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 3 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

6. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, ସେମାନଙ୍କ ବିୟୋଗଫଳର 4 ଗୁଣ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟିର ଯୋଗଫଳ 8 । ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି କେତେ ?

7. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି 10; କିନ୍ତୁ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣରୁ 1 ଊଣା ହୁଏ, ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

8. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟିର 3 ଗୁଣରୁ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର 2 ଗୁଣ ବିୟୋଗ କଲେ ବିୟୋଗଫଳ 2 ହେବ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟଟିରେ 7 ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ପ୍ରଥମଟିର 2 ଗୁଣ ହେବ । ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର ।

9. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବ ଓ ହର ରେ 2 ଯୋଗ କଲେ ତାହା $\frac{9}{11}$ ହୁଏ । ମାତ୍ର ଲବ ଓ ହରରେ 3 ଯୋଗ କଲେ ତାହା $\frac{5}{6}$ ହୁଏ । ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି କେତେ ?

10. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବର 3 ଗୁଣ ଓ ହରରୁ 3 ବିୟୋଗ କଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{18}{11}$ ହୁଏ । ମାତ୍ର ଲବରେ 8 ଯୋଗ କଲେ ଓ ହରକୁ 2 ଗୁଣ କଲେ ତାହା $\frac{2}{5}$ ହୁଏ । ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶ କେତେ ?

11. 5 ଟି କଲମ ଓ 6 ଟି ପେନ୍‌ସିଲର ଦାମ ମିଶି 9 ଟଙ୍କା ଏବଂ 3 ଟି କଲମ ଓ 2 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ର ଦାମ ମିଶି 5 ଟଙ୍କା ହୁଏ । ତେବେ ଗୋଟିଏ କଲମ ଓ ଗୋଟିଏ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ର ଦାମ କେତେ ?

12. ପିତାଙ୍କ ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର 3 ଗୁଣ । 12 ବର୍ଷ ପରେ ପିତାଙ୍କ ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର 2 ଗୁଣ ହେବ । ତେବେ ପିତା ଓ ପୁତ୍ରର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ କେତେ ?

13. ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 5 ସେ.ମି. କମାଇ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 3 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9 ବର୍ଗ ସେ.ମି. କମିଯାଏ । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 3 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 2 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 67 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ବଢ଼ିଯାଏ । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

14. 2 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 3 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 5 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ 4 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 9 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର 2 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରନ୍ତି । ତେବେ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ କିମ୍ବା ଜଣେ ପୁରୁଷ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବ ?

15. A ଓ B ଏକତ୍ର କାମ କରି ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 8 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । ସେମାନେ ଏକତ୍ର କାର୍ଯ୍ୟ ଆରମ୍ଭ କରି 3 ଦିନ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପରେ A ଚାଲିଗଲା ଓ ଅବଶିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ଆଉ 15 ଦିନରେ ଶେଷ କଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକାକୀ କାମ କଲେ କେତେ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ଶେଷ କରି ପାରିବେ ।

16. A ଓ B ର ଆୟର ଅନୁପାତ 8:7 ଓ ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 19:16 । ଯଦି ଉଭୟେ 1250 ଟଙ୍କା ସଂଚୟ କରିପାରନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଆୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. 5 ବର୍ଷ ପରେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ରର ବୟସର ତିନିଗୁଣ ହେବ ଓ 5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର ସାତଗୁଣ ଥିଲା । ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ ସ୍ଥିର କର ।

18. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମି. ଅଧିକ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. କମ୍ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 28 ବ.ମି. କମିଯାଏ; ମାତ୍ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 1 ମି. କମ୍ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. ଅଧିକ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 33 ବ.ମି. ବଢ଼ିଯାଏ । ମୂଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

19. 50 କୁ ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ଯେପରିକି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{1}{12}$ ହେବ ।

20. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାର ଲବ ଓ ହରକୁ ଯୋଗ କରି ଯୋଗଫଳର ଏକ-ତୃତୀୟାଂଶ ନେଲେ, ତାହା ହରଠାରୁ 4 ଊଣା ହୁଏ ଓ ହରରେ 1 ଯୋଗ କରି ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ତାହା $\frac{1}{4}$ ହୁଏ । ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

(QUADRATIC EQUATIONS)

T2LPT1

2.1 ଉପକ୍ରମ (Introduction) :

$P(x) = a x^2 + b x + c \ (a \neq 0)$ ଗୋଟିଏ **ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Quadratic Polynomial),** ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2, x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବ ସଂଖ୍ୟା ।

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ କୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic Equation)** କୁହାଯାଏ ।

ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax + b = 0, (a \neq 0)$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ଏବଂ ଏହାର ସମାଧାନ ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଥାଏ ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ବୀଜ ଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ସମୀକରଣ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0 = 0, (a_n \neq 0, n \in N)$ ର n ସଂଖ୍ୟକ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଅଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଟି "ବୀଜଗଣିତରେ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ' **(Fundamental Theorem of Algebra)** ରୂପେ ପରିଚିତ ।

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚିତ $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସଂପର୍କିତ ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ମନେକର ସମୀକରଣଟି $x^2 - 5x + 6 = 0$ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ପାଇବା,

$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ କିମ୍ବା $x = 3$

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ 2 ଓ 3 ।

ଯଦି $x = \alpha$ ପାଇଁ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c$ ର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ, ତେବେ α କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ (zero) କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 3, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ, କାରଣ $x = 3$ ପାଇଁ

x^2-5x+6 ର ମାନ 0 ଅଟେ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ, **ଦ୍ୱିଘାତ 'ପଲିନୋମିଆଲର ଶୂନ' ହେଉଛି ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚଳ ରାଶିର ମାନ ଯାହା ଲାଗି ପଲିନୋମିଆଲର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ । ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ଏକ ମୂଳ (root) ଅଟେ ।** ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ 'ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ' ଅବଲମ୍ବନରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିପରି ହୁଏ, ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: ax^2+bx+c ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ।

2.2. ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution by Completing the squares):

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ 'a' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$ ($\frac{c}{a}$ ଧ୍ରୁବକର ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ଯୋଗ କରାଗଲା ।)

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2$$

(ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଯାଇଛି ।)

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$\Rightarrow x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ କିମ୍ବା, $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ତେଣୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$; $\beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$

$\Rightarrow ax^2 + bx = -c$ ('c' କୁ ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 4a\,(ax^2 + bx) = -4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 4a ଗୁଣନ କଲେ)

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4\,ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2.\ 2ax.\ b = -4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2\ .\ 2ax.\ b + b^2 = b^2 - 4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ b^2 ଯୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow (2ax+b)^2 = \left(\pm\sqrt{(b^2-4ac)}\right)^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2ax+b = \pm\sqrt{(b^2-4ac)} \Rightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{(b^2-4ac)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ କିମ୍ବା $x = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

ଅତଏବ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ α ଓ β ହେଲେ :

$\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ ଏବଂ $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ .... (i)

(i) ରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସୂତ୍ରକୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର (Quadratic Formula)** କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପ୍ରଥମ କରି ଦଶମ ଶତାବ୍ଦିରେ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀଧର ଆଚାର୍ଯ୍ୟଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ପାଦିତ ହୋଇଥିଲା ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି $6x^2 + 11x + 3 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 6$, $b = 11$ ଓ $c = 3$

4a ଅର୍ଥାତ୍ 24 ଦ୍ୱାରା $6x^2 + 11x = -3$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$24(6x^2 + 11x) = (-3) \times 24$

$\Rightarrow 144x^2 + 264x = -72 \Rightarrow (12x)^2 + 2(12x) \times 11 = -72$

$\Rightarrow (12x)^2 + 2(12x) \times 11 + (11)^2 = (-72) + (11)^2$

$\Rightarrow (12x + 11)^2 = -72 + 121 = 49 = (\pm 7)^2$

$\Rightarrow 12x + 11 = \pm 7 \Rightarrow 12x = -11 \pm 7$

$\Rightarrow 12x = -11 + 7$ କିମ୍ବା $-11 - 7$

$\Rightarrow 12x = -4$ କିମ୍ବା -18

$\Rightarrow x = \dfrac{-4}{12} = -\dfrac{1}{3}$ କିମ୍ବା $\dfrac{-18}{12} = \dfrac{-3}{2}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $-\dfrac{1}{3}$ ଓ $\dfrac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $6x^2 + 11x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{11}{6}x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6 ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କରାଗଲା)

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\ \frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\ \frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2\right\} = \frac{121}{144} - \frac{1}{2} = \frac{49}{144}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{12}\right)^2 = \left(\pm\frac{7}{12}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{11}{12} = \pm\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{12} \pm \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{-11}{12} + \frac{7}{12} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-11}{12} - \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\frac{-1}{3}$ ଓ $\frac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି $x^2 + 2x - 63 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = 2$ ଓ $c = -63$

ଅତଏବ $\alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{(2^2 - 4 \times 1 \times (-63)}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \frac{-2 + 16}{2} = 7$

ଓ $\beta = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{\{2^2 - 4 \times 1 \times (-63)\}}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \frac{-2 - 16}{2} = \frac{-18}{2} = -9$

ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବୀଜ ଦ୍ୱୟ $\alpha = 7$ ଓ $\beta = -9$ । (ଉତ୍ତର)

2.3. ପ୍ରଭେଦକ (Discriminant) :

$b^2 - 4ac$ କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ 'D' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $D = b^2 - 4ac$ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ କୁ ବିଚାରକୁ ନେଲାବେଳେ, ସେଥିରେ a, b ଓ c ରାଶିତ୍ରୟ ବାସ୍ତବକ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 0$ ।

ମୂଳ ଦ୍ୱୟକୁ D ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

ଏବଂ $\beta = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ।

2.4 ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ (Nature of roots) :

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ (D) କୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

(i) $D > 0$ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha \neq \beta$ ।

(ii) $D = 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha = \beta$ ।

(iii) $D < 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ ।

ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ପ୍ରଭେଦକ $D \geq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ କିମ୍ବା ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ।

ବି.ଦ୍ର. : (i) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

(ii) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

D ର ମାନ	ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ	ବୀଜଦ୍ୱୟ
1. $D > 0$	ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଅସମାନ	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
(i) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା	ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ	ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
2. $D = 0$	ବାସ୍ତବ (ପରିମେୟ) ଏବଂ ସମାନ	$\frac{-b}{2a}$
3. $D < 0$	ଅବାସ୍ତବ ଅର୍ଥାତ୍ ବାସ୍ତବ ମୂଳ ନାହିଁ	

ଉଦାହରଣ - 3 : $x^2 - 2x - 8 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = -2$ ଓ $c = -8$

$\therefore$ ପ୍ରଭେଦକ $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$

ଯେହେତୁ $D > 0$, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପର ପୃଥକ ଅଟନ୍ତି । (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 36 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବେ ।

2.5 ମୂଳଦ୍ୱୟ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ (Relation between roots and coefficients) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଓ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β । ଅତଏବ

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \quad \text{ଏବଂ} \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

(a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ)

(I) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି :

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$= \dfrac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}}$ ।

$\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି} = \dfrac{-b}{a}}$

(II) ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ : $\alpha\beta = \left[\dfrac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]\left[\dfrac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]$

$= \dfrac{(-b)^2-\left(\sqrt{(b^2-4ac)}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ଧ୍ରୁବକ ରାଶି}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}}$ ।

$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ} = \dfrac{c}{a}}$

ଉଦାହରଣ - 4 :

ଯଦି $25x^2 + 30x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ $\alpha + \beta$ ଓ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 25, b = 30$ ଓ $c = 7$ ।

$\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{30}{25} = -\dfrac{6}{5}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{25}$ (ଉତ୍ତର)

2.6 କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ଫଳାଫଳ (Some known results) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଏବଂ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

$\therefore \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(I) $\alpha-\beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \pm\sqrt{\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}\right\}} = \pm\dfrac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a}$

(II) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-2\dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

(III) $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a} = \frac{-b\sqrt{(b^2-4ac)}}{a^2}$$

(IV) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta\,(\alpha+\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{-b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

(V) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b^2 - 2ac}{ca}$

ଉଦାହରଣ - 5 : ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ,

ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + 3\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 13$ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣରେ, $a = 2, b = -6, c = 3$ ।

$\therefore \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(-6)}{2} = 3$ ଏବଂ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \dfrac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{3 \times 2}{3} = 2$ ଏବଂ $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(3)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{(9-3) \times 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + 3\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 4 + (3 \times 2) + 2 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)$

$= 4 + 6 + 3 = 13 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଗଠନ (Formation of a quadratic equation) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ତେବେ $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.5)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$ (a ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - (-\dfrac{b}{a})x + \dfrac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ ଆବଶ୍ୟକ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ : x^2–(ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି)x+ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = 0** ।

ସୂଚନା : ମୂଳଦ୍ୱୟ ଜଣାଥିଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି – 5 ଓ ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର α ଓ β ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ।

ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -5$ ଓ $\alpha\beta = 3$ (ଦତ୍ତ)

ଆବଶ୍ୟକ ସମୀକରଣ : $x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-5)x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : $ax^2 - 4x + (4a + 1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 2 ହେଲେ a ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ଏଠାରେ $\alpha\beta = \quad = 2 \Rightarrow 4a + 1 = 2a \Rightarrow 4a - 2a = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ଯଦି $ax^2 + 4x + 6a = 0,\ a \neq 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ, a ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -\dfrac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = -\dfrac{4}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{x \text{ ବିହୀନ ପଦ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = \dfrac{6a}{a} = 6$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\alpha + \beta = \alpha\beta \Rightarrow -\frac{4}{a} = 6 \Rightarrow a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ତ୍ରୁଟିକୁ ସଂଶୋଧନ କରି ଲେଖ ।

(i) $x^2 - 4x + 4 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଭିନ୍ନ ।

(ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ 2 ଅଟେ ।

(iii) $ax^2 + bx - c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{c}{a}$ ।

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{b}{a}$ ।

(v) 1 ଓ –1 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $x^2 + 1 = 0$ ।

(vi) $x^2 = 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

(vii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $-\frac{3}{2}$ ।

(viii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{1}{3}$ ।

2 . ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 ଓ –5 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $mx^2 - 2x + (2m-1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, m ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) $x^2 - px + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 2 ହେଲେ, p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) $4x^2 - 2x + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, c ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(v) $5x^2 + 2x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ –2 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vi) $x^2 - kx + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 3 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vii) $2x^2 + kx + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ମୂଳ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

3. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି x ରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $x^2 - x - 12 = 0$ (b) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

(c) $x + \frac{3}{x} = x^2$ (d) $x(x-1)(x+5) = 0$

(ii) $7x^2 - 9x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ କ'ଣ ?

(a) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ୍ । (b) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(c) ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ । (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ।

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି –6 ଓ 8 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $(x + 6)(x + 8) = 0$ (b) $(x + 6)(x - 8) = 0$

(c) $(x - 6)(x + 8) = 0$ (d) $(x - 6)(x - 8) = 0$

(iv) $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) 3 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{-5}{3}$

(v) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha+\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{1}{16}$ (b) 4 (c) $\frac{1}{2}$ (d) –8

(vi) $4x^2 + 3x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $-\frac{3}{7}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $-\frac{7}{3}$

(vii) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୁଣଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 4 ଓ $\frac{5}{2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ?

(a) $2x^2 + 8x + 5 = 0$ (b) $2x^2 - 8x + 5 = 0$

(c) $2x^2 + 8x - 5 = 0$ (d) $2x^2 - 8x - 5 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 + x - 6 = 0$ (ii) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

(iii) $14x^2 + x - 3 = 0$ (iv) $3x^2 - 32x + 12 = 0$

(v) $x^2 + 2px - 3qx - 6pq = 0$ (vi) $\sqrt{3}\,x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$

(vii) $25x^2 + 30x + 7 = 0$ (viii) $3a^2x^2 + 8abx + 4b^2 = 0$ $(a \neq 0)$

(ix) $x^2 + ax + b = 0$ (x) $x^2 + bx = a^2 - ab$

5. ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର ବୀଜ ବା ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $4x^2 - 11x + 6 = 0$ (ii) $(2x - 1)(x - 2) = 0$

(iii) $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (iv) $a(x^2+1) = x(a^2 + 1)$, $a \neq 0$

(v) $6x^2 + 11x + 3 = 0$ (vi) $2x^2 + 41x - 115 = 0$

(vii) $12x^2 + x - 6 = 0$ (viii) $(6x + 5)(x - 2) = 0$

(ix) $15x^2 - x - 28 = 0$ (x) $(x + 5)(x - 5) = 39$

6. ଯଦି $4x^2 - 13x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 12 ଗୁଣ ହେଲେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

7. $x^2 - 5x + p = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟି ଅପେକ୍ଷା 3 ଅଧିକ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

8. ଯଦି $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

9. ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $(\alpha+1)(\beta+1)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଯଦି $2x^2 - (p+1)x + p - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଓ ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେଲେ p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

11. ଯଦି $5x^2 - 3x - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\alpha^3 + \beta^3 = \frac{117}{125}$

12. ଯଦି $5x^2 + 17x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. $x^2 - 8x + 16p = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ପରିପ୍ରକାଶକୁ p ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

14. ଯଦି $x^2 - 2(5+2m)x + 3(7+10m) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହୁଏ, m ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

15. (i) ଯଦି $a = b = c$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମୀକରଣ

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(ii) ଯଦି $a + b + c = 0$ ଏବଂ $a, b, c \in Q$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$(b+c-a)x^2 + (c+a-b)x + (a+b-c) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେବେ ।

16. ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 3 ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 29 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

17. ଯଦି $2x^2 - 4x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 4\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 12$$

18.(i) ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 4 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $4b^2 = 25ac$ ।

(ii) ଯଦି $x^2 - px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 2 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$2p^2 = 9q$ ।

19.(i) ଯଦି $41x^2 - 2(5a+4b)x + (a^2+b^2) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

(ii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସେମାନଙ୍କର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2q = p(p+1)$ ।

(iii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ ଅନ୍ୟଟିର ବର୍ଗ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $p^3 + q^2 + q = 3pq$

20. ଯଦି $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

2.8 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତରଣ : (Equations reducible to quadratic form)

ଏପରି ଅନେକ ସମୀକରଣ ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁମାନଙ୍କ ରୂପ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ରୂପ ଯଥା $ax^2 + bx + c = 0$ ନୁହେଁ। ମାତ୍ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପକୁ ଆଣି ସମାଧାନ କରିହେବ । ଏପରି କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ - 9 : $4x^4 - 21x^2 + 20 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4 ଓ ଏହା ଦ୍ୱିଘାତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର $x^2 = y$ ଲେଖିଲେ ଏହାର ରୂପ

$$4y^2 - 21y + 20 = 0 \text{ .... (i)}$$

ସମୀକରଣ (i) ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି y ରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରଥମେ ସମୀକରଣ (i) ର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

ସମୀକରଣ (i) ରେ $a = 4, b = -21$ ଓ $c = 20$ ।

ପ୍ରଭେଦକ $(D) = b^2 - 4ac = (-21)^2 - 4 \times 4 \times 20 = 441 - 320 = 121$

$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-21) \pm \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{21 \pm 11}{8} = \frac{21+11}{8}$ କିମ୍ବା $\frac{21-11}{8} = 4$ କିମ୍ବା $\frac{5}{4}$

$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

ପୁନଶ୍ଚ $y = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $2, -2, \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ବା $(\pm 2, \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : ସମାଧାନ କର : $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 8(x + \frac{1}{x}) - 29 = 0$

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $\Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+8(x+\frac{1}{x})-29=0$

$$\Rightarrow 4\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right\}+8\left(x+\frac{1}{x}\right)-29=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)-45=0 \quad ....(i)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $x+\frac{1}{x}=y$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣର ରୂପାନ୍ତରିତ ରୂପ $4y^2+8y-45=0$ ହେବ ।

ଏଠାରେ, $a=4, b=8$ ଓ $c=-45$ ।

ପ୍ରଭେଦକ $(D)=b^2-4ac=(8)^2-4 \times 4 \times (-45)=64+720=784=(28)^2$ ।

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବ ($\because$ D ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା) ।

$\therefore \quad y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{784}}{2\times4}=\frac{-8\pm28}{8}=\frac{-8+28}{8}$ କିମ୍ବା $\frac{-8-28}{8}=\frac{5}{2}$ କିମ୍ବା $\frac{-9}{2}$ ।

ଯଦି $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ ହୁଏ, ତେବେ $2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$

$=\frac{5+3}{4}$ କିମ୍ବା $\frac{5-3}{4}=2$ କିମ୍ବା $\frac{1}{2}$ ।

ସେହିପରି ଯଦି $x+\frac{1}{x}=\frac{-9}{2}$ ତେବେ $2x^2+9x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{81-16}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{65}}{4}$ ।

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଓ ଅସମାନ)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $2, \frac{1}{2}, \frac{-9+\sqrt{65}}{4}, \frac{-9-\sqrt{65}}{4}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ସମାଧାନ କର : $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6}$

ସମାଧାନ : ମନେକର $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=y$

ତେବେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ହେବ $y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6y^2-13y+6=0$

$\therefore\ y = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \dfrac{13 \pm 5}{12}$

$\therefore\ y = \dfrac{18}{12}$ କିମ୍ବା $\dfrac{8}{12} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$ କିମ୍ବା $y = \dfrac{2}{3}$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow 4x = 9 - 9x \Rightarrow 13x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{13}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ $y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow 9x = 4 - 4x \Rightarrow 13x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{13}$ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $\dfrac{9}{13}$ ଓ $\dfrac{4}{13}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

$\Rightarrow \{x(x+12)\}\{(x+5)(x+7)\} + 150 = 0$ (କାହିଁକି ?)

$\Rightarrow (x^2 + 12x)(x^2 + 12x + 35) + 150 = 0$

$\Rightarrow y(y + 35) + 150 = 0$ (ଏଠାରେ $x^2 + 12x = y$ ହେଲେ)

$\Rightarrow y^2 + 35y + 150 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4 \times 1 \times 150}}{2 \times 1}$ (ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ)

$= \dfrac{-35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2} = \dfrac{-35 \pm \sqrt{625}}{2} = \dfrac{-35 \pm 25}{2} = -5$ କିମ୍ବା -30

$y = -30 \Rightarrow x^2 + 12x = -30 \Rightarrow x^2 + 12x + 30 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{24}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -6 \pm \sqrt{6}$

ପୁନଶ୍ଚ $y = -5 \Rightarrow x^2 + 12x = -5 \Rightarrow x^2 + 12x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 20}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{124}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{31}}{2} = -6 \pm \sqrt{31}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $-6 + \sqrt{6}, -6 - \sqrt{6}, -6 + \sqrt{31}, -6 - \sqrt{31}$

ବା $-6 \pm \sqrt{6}, -6 \pm \sqrt{31}$ । (ଉତ୍ତର)

2.9 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ (Application of Quadratic Equation) :

କେତେକ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ 'ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ'ର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ତର୍ଜମା ଏବଂ ଅନୁଶୀଳନରେ ଆବଶ୍ୟକ ଥିବା ଉତ୍ତରକୁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ରୂପେ ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଏ । ତତ୍ପରେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପରେ ଇପ୍ସିତ ଉତ୍ତର ମିଳିଥାଏ । ବେଳେବେଳେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନରେ ମିଳୁଥିବା ଦୁଇଟି ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ, ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ବେଳେ ଅନ୍ୟଟି ସିଦ୍ଧ କରୁନଥାଏ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ମୂଳଟି ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ହୋଇଥାଏ । ଉକ୍ତ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଘଟୁଥିବା ଘଟଣା ସଂପର୍କିତ କିଛି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 13 : ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳର ସମଷ୍ଟି 90 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x^2

$\therefore x^2$ ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ x ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $x^2 + x = 90 \Rightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 9x - 90 = 0$

$\Rightarrow x\ (x + 10) - 9\ (x + 10) = 0$

$\Rightarrow (x + 10)\ (x - 9) = 0 \Rightarrow x = -10$ କିମ୍ବା $x = 9$ ।

ଯେହେତୁ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ, x ର ମାନ -10 ହେବ ନାହିଁ । ତେବେ $x = 9$ ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି $x^2 = 9^2 = 81$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x ।

$\therefore x$ ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ $\sqrt{x}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $x + \sqrt{x} = 90 \Rightarrow \sqrt{x} = 90 - x$

$\Rightarrow x = (90 - x)^2 \Rightarrow x = 8100 - 180x + x^2 \Rightarrow x^2 - 181x + 8100 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 100x - 81x + 8100 = 0 \Rightarrow (x - 100)(x - 81) = 0$

$\Rightarrow x - 100 = 0$ କିମ୍ବା $x - 81 = 0 \Rightarrow x = 100$ କିମ୍ବା $x = 81$

$x = 100$ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ନାହିଁ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

କିନ୍ତୁ $x = 81$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି 81 । (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା : ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅବଲମ୍ବନରେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ ।)

ଉଦାହରଣ - 14 : ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ x ଓ (15 –x)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{1}{x}+\frac{1}{15-x}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15-x+x}{x(15-x)}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{15x-x^2}=\frac{3}{10}$

$\Rightarrow 150 = 45x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 45x + 150 = 0$ (ପାର୍ଶ୍ୱପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା, ତେଣୁ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ସମ୍ଭବ)

$= x^2 - 10x - 5x + 50 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 10$ କିମ୍ବା $x = 5$

ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ହୁଏ ତେବେ ଅନ୍ୟଟି 5 ହେବ । ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟାଟି 5 ହେଲେ ଅନ୍ୟଟି 10 ହେବ ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ 5 ଓ 10 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 :

ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 11 କି.ମି. । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଯାଇ ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରିଆସିବାକୁ 2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ରୋତର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି x କି.ମି. ।

ପ୍ରତିକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11– x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା

ଅନୁକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11+ x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ।

$\therefore$ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଏବଂ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{12}{11-x}$ ଘଣ୍ଟା ଏବଂ $\frac{12}{11+x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ଲାଗିବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{12}{11+x}+\frac{12}{11-x}=2\frac{3}{4}$ [2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ = $2\frac{45}{60}$ ଘଣ୍ଟା = $2\frac{3}{4}$ ଘଣ୍ଟା]

$$\Rightarrow \frac{12(11-x)+12(11+x)}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{264}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{24}{121-x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 121 - x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ ।}$$

$\therefore$ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 5 କି.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି 2 । ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(ii) ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 20 । ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ y ନେଇ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 18 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 72 । ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iv) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ବର୍ଗ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି $S = \frac{n(n+1)}{2}$ । ଯଦି S = 120 ହୁଏ ତେବେ n ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(vi) $\sqrt{x} + x = 6$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(vii) $\sqrt{x+9} + 3 = x$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(viii) $x - 2\sqrt{2} - 6 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ତାହାର ବର୍ଗମୂଳ ଅପେକ୍ଷା 12 ଅଧିକ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ତାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{41}{20}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

(iii) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{11}{30}$ ହେଲେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କରି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{23}{132}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ଯଦି 51 କୁ ଦୁଇଭାଗ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 378 ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଏକ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର 3 ଗୁଣ । ଏକକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କଟି ଦଶକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କ ଠାରୁ 2 ବୃହତ୍ତର । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ପରିବାରରେ, ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ, ବିଟା ଓ ଗାମାର ବୟସର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ । ଯଦି ବିଟା, ଗାମା ଠାରୁ 1 ବର୍ଷ ବଡ଼ ହୁଏ ଏବଂ ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ 42 ହୁଏ, ତେବେ 5 ବର୍ଷ ପରେ ବିଟାର ବୟସ କେତେ ହେବ ?

5. କୌଣସି ଏକ ଅରଣ୍ୟରେ ବାସ କରୁଥିବା ମର୍କଟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସେମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ ଅଷ୍ଟମାଂଶର ବର୍ଗ କ୍ରୀଡ଼ାରତ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ ବାରଟି ମର୍କଟ ଏକ ଶୃଙ୍ଗ ଉପରେ ବସିଥିଲେ । ଅରଣ୍ୟରେ ସମ୍ଭବତଃ କେତେ ମର୍କଟ ଥିଲେ ?

6. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 30 ବ.ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 7 ସେ.ମି. ଅଧିକ ହେଲେ, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

7. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି. ଓ (3x–1) ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ତେବେ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $\frac{1}{2}n(n-3)$ । ଯଦି ବହୁଭୁଜର 54 ଟି କର୍ଣ୍ଣ ରହିବ, ତେବେ ବହୁଭୁଜର ବାହୁର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

9. ଦୁଇଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି 468 ବ.ମି. ଏବଂ ପରିସୀମାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 24 ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ଚାଲିବାର ବେଗକୁ ଯଦି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 1 କି.ମି. ବୃଦ୍ଧି କରେ ତେବେ 2 କି.ମି. ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 10 ମିନିଟ୍ କମ୍ ସମୟ ନେଇଥାନ୍ତା । ତେବେ ବ୍ୟକ୍ତିର ଚାଲିବାର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ସ୍ଥିର କର ।

11. ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 15 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଅତିକ୍ରମ କରି ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରି ଆସିବାକୁ 4 ଘଣ୍ଟା 30 ମି. ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 250 ଟଙ୍କାକୁ ସମାନ ଭାଗରେ ବଣ୍ଟାଗଲା । ଯଦି 25 ଜଣ ଛାତ୍ର ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତେ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ 0.50 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ କମ୍ ପାଇଥାନ୍ତେ । ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 8 ମିଟର ଅଧିକ । କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 240 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟିର ପରିସୀମା କେତେ ?

14. ଏକ ରେଳଗାଡ଼ି 300 କି.ମି. ଦୀର୍ଘ ଯାତ୍ରା ପଥରେ ସମାନ ବେଗରେ ଗତି କରୁଥିଲା । ଯଦି ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 5 କି.ମି. ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତା, ତେବେ ଗାଡ଼ିଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟର 2 ଘଣ୍ଟା ପୂର୍ବରୁ ଯଥା ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିଥାନ୍ତା । ତେବେ ଗାଡ଼ିର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର ।

15. ଏକ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମିଟର, ପ୍ରସ୍ଥ 16 ମିଟର ଓ ପଡ଼ିଆର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମାନ ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ଯଦି ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 230 ବର୍ଗମିଟର ହୁଏ ତେବେ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. କେତେକ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ଏକ ବଣ ଭୋଜିର ଆୟୋଜନ କଲେ । ଖାଦ୍ୟ ଅଟକଳ (Budget) 480 ଟଙ୍କା ଥିଲା । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 8 ଜଣ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଗଲେ ନାହିଁ; ଯାହା ଫଳରେ ଖାଦ୍ୟ ବାବଦ ଖର୍ଚ୍ଚ ଜଣପିଛା 10 ଟଙ୍କା ବଢ଼ିଗଲା । ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଯାଇଥିଲେ ?

17. ସମାଧାନ କର :

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

(ii) $5\sqrt{\frac{3}{x}} + 7\sqrt{\frac{x}{3}} = 22\frac{2}{3}$

(iii) $3x + \frac{5}{16x} - 2 = 0$

(iv) $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^4 - 6\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 + 8 = 0$

(v) $(3x^2 - 8)^2 - 23(3x^2 - 8) + 76 = 0$

(vi) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

(vii) $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

(viii) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$

(ix) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

(x) $\frac{3}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{2x}}{5} = 5\frac{9}{10}$

(xi) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ $(x \neq 0, x \neq -1)$

(xii) $x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63$

(xiii) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = 6\frac{6}{7}$ $(x \neq -3, 3)$

(xiv) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$

(xv) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2 = 0$

(xvi) $\sqrt{2x+9} + x = 13$

(xvii) $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$

ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି

(ARITHMETIC PROGRESSION)

TALGM6

3.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଗୋଟିଏ ନିୟମକୁ ଭିତ୍ତି କରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମ (Order) ରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାସମୂହକୁ ଏକ **ଅନୁକ୍ରମ (Sequence)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : 2, 4, 6, 8..............; 1, 3, 5, 7 ....;

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.......... ; 2, 6, 18, 54............... ଇତ୍ୟାଦି ।

ଅନୁକ୍ରମରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଦ (term) କୁହାଯାଏ । ଅନୁକ୍ରମର ବିଶେଷତ୍ୱ ହେଲା, ପ୍ରଥମ ତିନିଟି କିମ୍ବା ଚାରିଟି ପଦକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ଏହାର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଜାଣି ହୁଏ ।

ସାଧାରଣ ଭାବେ ଲେଖିଲେ ଅନୁକ୍ରମକୁ t_1, t_2, t_3, t_4, ... ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଏଠାରେ t_1, t_2, t_3, t_4, ... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପ୍ରଥମ ପଦ (first term), ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ (second term), ତୃତୀୟ ପଦ (third term) ଏବଂ ଚତୁର୍ଥ ପଦ (fourth term) ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି n - ତମ ପଦକୁ t_n ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ । n - ତମ ପଦକୁ ଅନୁକ୍ରମର **ସାଧାରଣ ପଦ (General term)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = 0$ (ଶୂନ) ତେବେ ଅନୁକ୍ରମଟି $t_1, t_2, \ldots.. t_n$ ଓ ଏହା ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ । ଆମର ଆଲୋଚନାରେ ଆସୁଥିବା ଯେ କୌଣସି ଅନୁକ୍ରମ ସସୀମ (Finite sequence) । ଉକ୍ତ ଅନୁକ୍ରମକୁ $\{t_n\}$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ଅସୀମ ଅନୁକ୍ରମ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ପଢ଼ିବ ।

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନିୟମକୁ ନେଇ କ୍ରମରେ ଥିବା ଅନୁକ୍ରମକୁ ଗୋଟିଏ **ପ୍ରଗତି (Progression)** କୁହାଯାଏ ।

ପ୍ରଗତି ସାଧାରଣତଃ ତିନି ପ୍ରକାରର -

(i) ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (Arithmetic progression)

(ii) ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି (Geometric progression)

(iii) ହରାତ୍ମକ ପ୍ରଗତି (Harmonic progression)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଗତି ଗୋଟିଏ ପ୍ରକାରର ସଂଖ୍ୟା ଅନୁକ୍ରମ ସୃଷ୍ଟି କରିଥାନ୍ତି । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କେବଳ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ଓ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଗତି ତଥା ହରାତ୍ମକ ପ୍ରଗତି ସମ୍ପର୍କରେ ଉଚ୍ଚମାଧ୍ୟମିକ ଗଣିତରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

3.2 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (Arithmetic Progression (A.P.)) :

ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ (A. P.) ଲେଖାଯାଏ । ଯଦି କୌଣସି ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରୁ (ପ୍ରଥମଟିକୁ ଛାଡ଼ି) ପୂର୍ବପଦର ବିୟୋଗଫଳ ସର୍ବଦା ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଅନୁକ୍ରମଟିକୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (A. P.) କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ବିୟୋଗଫଳକୁ **ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର (Common difference)** କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ 'd' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଅତଏବ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ପାଇଁ $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = ... = t_n - t_{n-1} = d$ ଅଟେ ।

3.2.1 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର n-ତମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

କୌଣସି A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d ହେଲେ ଏହି ଅନୁକ୍ରମର ସାଧାରଣ ରୂପ

$$t_1 = a$$
$$t_2 = a + d = a + (2 - 1)\,d$$
$$t_3 = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$$
$$t_4 = a + 3d = a + (4 - 1)\,d$$
....

....

$$t_n = a + (n - 1)\,d$$

ଅର୍ଥାତ୍ A.P. ରେ ଥିବା ଅନୁକ୍ରମର ସାଧାରଣ ରୂପଟି $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + (n - 1)d$

ସୁତରାଂ n ତମ ପଦର ସୂତ୍ର : $\boxed{t_n = a + (n - 1)d}$

ସୂଚନା : A.P. ରେ ସାଧାରଣତଃ ପ୍ରଥମ ପଦକୁ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତରକୁ d ନିଆଯାଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ A.P. ଅଟେ ।

(i) $-18, -16, -14, -12.......$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = -18$ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = -16 - (-18) = -14 - (-16) = -12 - (-14) = 2$

(ii) $-11, 0, 11, 22, 33, 44.............$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = -11$ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = 0 - (-11) = 11 - 0 = 22 - 11 = 11$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, ...$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{3}$ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

ଉପରେ ଥିବା A.P. ମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ପଦ t_n ଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ

(i) $t_n = -18 + (n-1)2 = -18 + 2n - 2 = 2n - 20$ $\quad (\because t_n = a + (n-1)d)$

(ii) $t_n = -11 + (n-1)11 = -11 + 11n - 11 = 11n - 22$

(iii) $t_n = \frac{1}{3} + (n-1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n$

ପୁନଶ୍ଚ କୌଣସି A.P. ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରରେ a, n ମାନ ସ୍ଥାପନ କରି t_n ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।

ମନେକର ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଥମ A.P. ର ଦଶମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$t_{10} = -18 + (10-1)2 = -18 + 18 = 0$

3.2.2 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ n - ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳ :

A.P. ର ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳର ସୂତ୍ରକୁ ପ୍ରଥମେ **ଜର୍ମାନୀର ବିଖ୍ୟାତ ଗଣିତଜ୍ଞ ଗାଉସ୍ (Gauss)** ତାଙ୍କ ବାଲ୍ୟକାଳରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିଥିଲେ । ତାଙ୍କର ସ୍କୁଲ ଶିକ୍ଷକ 1 ରୁ 100 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଗାଉସ୍‌ଙ୍କୁ କହିଲେ । ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ଧାରଣା ଥିଲା ଏଥିପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ସମୟ ଲାଗିବ ଓ ଗାଉସ୍ ଚୁପ୍‌ଚାପ୍ ରହି ଏହା କରିବେ । ମାତ୍ର ଅଳ୍ପ ସମୟରେ ଗାଉସ୍ ଏହାର ଉତ୍ତର ପାଇଥିଲେ । ସେ ଯେଉଁ ପଦ୍ଧତିରେ କଲେ ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :

ମନେକର 1 ରୁ 100 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ S_{100} ତେବେ

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100$$
$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

ମିଶାଇଲେ $$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots + 101 + 101 + 101$$

$$\therefore 2S_{100} = 101 \times 100 \Rightarrow S_{100} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ a, a + d, a + 2d, a + 3d, ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ n ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ମନେକର n ତମ ପଦଟି $t_n = a + (n-1)d = l$ ହେଉ । ତେବେ ଶେଷ ପଦ = l, ଏହାର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପଦ $l-d$, $l-d$ ର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପଦ $l - 2d$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ମନେକର n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ S_n

$$\therefore S_n = a + (a+d) + \ldots + (l-d) + l$$

$$S_n = l + (l-d) + \ldots + (a+d) + a$$ (ପଦଗୁଡ଼ିକ ଓଲଟାକ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଇଛି)

ମିଶାଇଲେ $2S_n = (a+l) + (a+l) + \ldots$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

$\therefore 2S_n = n(a+l) \qquad \therefore S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

$\therefore$ n **ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟିର ସୂତ୍ର :** $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a+l)}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{S_n = \frac{n}{2} \text{ (ପ୍ରଥମ ପଦ + n ତମ ପଦ)}}$

ପୁନଶ୍ଚ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରରେ $l = a + (n-1)d$ ସ୍ଥାପନ କଲେ

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$\therefore$ **n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ୟ ଏକ ସୂତ୍ର :** $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 1. ପ୍ରଥମ n ଗୋଟି ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

କାରଣ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1 ଓ n ତମ ପଦ = n ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 2. ଯଦି ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = 0$ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରଗତିଟି a, a, a, a, ... ହେବ ଏବଂ $S_n = a+a+a+....$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ = na ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 3. ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗକଲେ;

(ii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରୁ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ;

(iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ;

(iv) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d

ଓ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିଟି $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$,

(i) ର ସତ୍ୟତା ପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ k ସଂଖ୍ୟାଟି ଯୋଗ କଲେ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମଟି

$(a+k), (a+k)+d, (a+k)+2d, ..., (a+k)+(n-1)d$ ହେବ ।

ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ଯେଉଁଥିରେ ପ୍ରଥମ ପଦ a+k ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d,

ଠିକ୍ ଅନୁରୂପ ଭାବେ (ii), (iii) ଓ (iv) ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

(a) ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା ପଦ୍ଧତିରେ 15 ଠାରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ଗୋଟିଏ A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ 4 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର 3 ହେଲେ

(i) A.P. ଟି ଲେଖ,

(ii) A.P. ର 33 ତମ ପଦ (t_{33}) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ

(iii) A.P. ର ପ୍ରଥମ 40 ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି (s_{40}) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

(a) 1 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ହେଲେ 85 ଗୋଟି ଓ 1 ରୁ 14 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ହେଲେ 14 ଗୋଟି ।

$\therefore$ 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା = $85 - 14 = 71$

ବିକଳ୍ପ ହିସାବ : 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା = (85 – 15) + 1 = 71

ମନେକର 15 ରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳ = S_{71} । ଅତଏବ

S_{71} = 15 + 16 + 17 + 18 +.... + 83 + 84 + 85

S_{71} = 85 + 84 + 83 + 82 +.... + 17 + 16 + 15 (ଓଲଟାଇ ଲେଖିଲେ)

$2S_{71}$ = 100 + 100 + 100 + 100 ..... + 100 + 100 + 100

$\therefore 2S_{71} = 100 \times 71$

$\Rightarrow S_{71} = \frac{100 \times 71}{2} = 50 \times 71 = 3550$ (ଉତ୍ତର)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, $S_{71} = \frac{71}{2}(15+85) = 50 \times 71 = 3550$ $[\because S_n = \frac{n}{2}\{a+l\}]$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ (a) = 15 ଏବଂ ଶେଷପଦ (l) = 85 ।

(b) (i) A. P. = 4, 7, 10, 13, 17, ... [$\because$ a = 4 ଏବଂ d = 3]

(ii) $t_{33} = 4 + (33 - 1) \times 3 = 100$ $[\because t_n = a + (n-1)d]$

(iii) 40 ଟି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ମିଶାଣଫଳ $(S_{40}) = \frac{40}{2}\{2 \times 4 + (40 - 1)\,3\} = 20(8+117)$

$\Rightarrow S_{40} = 20 \times 125$ $[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}]$

$\Rightarrow S_{40} = 2500$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 : ଗୋଟିଏ A.P. ର $t_4 = 11$, $t_{10} = 16$ ହେଲେ, t_{21} ଏବଂ ପ୍ରଥମ 40 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରଥମ ପଦ = a ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = d

ଦତ୍ତ ଅଛି : $t_4 = 11 \Rightarrow a + (4 - 1)\,d = 11 \Rightarrow a + 3d = 11$ .... (1)

ଦତ୍ତ $t_{10} = 16 \Rightarrow a + (10 - 1)\,d = 16 \Rightarrow a + 9d = 16$ .... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ $\Rightarrow (a + 9d) - (a + 3d) = 16 - 11 \Rightarrow 6d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{6}$

ବର୍ତ୍ତମାନ (1) $\Rightarrow a + 3 \times \frac{5}{6} = 11 \Rightarrow a = 11 - \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$

ତେଣୁ $t_{21} = a + (21 - 1)\,d = \frac{17}{2} + 20 \times \frac{5}{6} = \frac{151}{6} = 25\frac{1}{6}$ (ଉତ୍ତର)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $S_{40} = \frac{40}{2}\{2 \times \frac{17}{2} + (40-1)\frac{5}{6}\}$

$\Rightarrow S_{40} = 20(17 + \frac{65}{2}) = 340 + 650 = 990$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : 2, 4, 6, 8, ... ଅନୁକ୍ରମର S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$, $t_3 - t_2 = 6 - 4 = 2$, $t_4 - t_3 = 8 - 6 = 2$ ....ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ଅଟେ ଏବଂ ଏହାର $a = 2$ ଓ $d = 2$

$\therefore\ S_{50} = \frac{50}{2}\ \{2 \times 2 + (50 - 1)2\} = 2550\ [\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\}]$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : 27 + 24 + 21+ ... ... ର କେତୋଟି ପଦ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ ?

ଦୁଇଟି ଉତ୍ତରର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ ବୁଝାଅ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $a = 27$ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = 24 - 27 = 21 - 24 = -3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ଅନୁକ୍ରମଟି 27, 24, 21, ... A.P. ରେ ଅଛି ।

ମନେକର ପଦ ସଂଖ୍ୟା n ହେଲେ ଯୋଗଫଳ = 132 $\quad \therefore\ S_n = 132$

$\Rightarrow \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\,d\} = 132 \Rightarrow \frac{n}{2}\{2 \times 27 + (n - 1)(-3)\} = 132$

$\Rightarrow \frac{n}{2}(57 - 3n) = 132 \Rightarrow n(57 - 3n) = 264 \Rightarrow -3n^2 + 57n - 264 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 88 = 0 \Rightarrow (n - 11)(n - 8) = 0$

$\Rightarrow n = 11$ ବା 8 ଅର୍ଥାତ୍ A.P. ର 11 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ ଏବଂ 8 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ 132 ହେବ ।।

ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ : ବର୍ତ୍ତମାନ $t_9 = 27 + (9 - 1)(-3) = 3$, $\qquad t_{10} = t_9 + d = 3 + (-3) = 0$

$t_{11} = t_{10} + d = 0 + (-3) = -3$

$\Rightarrow t_9 + t_{10} + t_{11} = 3 + 0 + (-3) = 0$

$\Rightarrow S_{11} = S_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} = S_8 + 0 = S_8$

ଅର୍ଥାତ୍ ଯୋଗଫଳରେ 8 କିମ୍ବା 11 ଗୋଟି ପଦ ରହିଲେ ଯୋଗଫଳ 132 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଅନୁକ୍ରମର $t_n = 2n + 3$ ହେଲେ S_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $t_n = 2n + 3$ ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱରେ n ବଦଳରେ 1 ଲେଖିଲେ ପାଇବା

$$t_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \Rightarrow a = 5$$

ସେହିଭଳି n ବଦଳରେ 2 ଲେଖିଲେ ଏବଂ 3 ଲେଖିଲେ ପାଇବା

$t_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$ ଏବଂ $t_3 = 2 \times 3 + 3 = 9$

$t_3 - t_2 = 9 - 7 = 2$ ଏବଂ $t_2 - t_1 = 7 - 5 = 2 \qquad \therefore t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = 2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର 2 ହେତୁ ଲବ୍ଧ ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ଯାହାର $d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\,d] = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n - 1) \times 2]$$

$= \frac{n}{2}(10 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n + 8) = n(n + 4) = n^2 + 4n$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା: n ସ୍ଥାନରେ ଗୋଟିଏ ଯେକୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଅର୍ଥାତ୍ $n = 30$ ନେଲେ, S_{30} ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇପାରିବ ।

$\therefore S_{30} = 30^2 + 4 \times 30 = 900 + 120 = 1020$

ଉଦାହରଣ - 7 : ଗୋଟିଏ ଅନୁକ୍ରମର $S_n = 3n + 4n^2$ ହେଲେ, t_7 କେତେ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $S_n = 3n + 4n^2$

(n–1) ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି S_{n-1} ହେଲେ (S_n ରେ n ପରିବର୍ତ୍ତେ n–1 ଲେଖିଲେ)

$S_{n-1} = 3(n-1) + 4(n-1)^2 = 3n - 3 + 4n^2 - 8n + 4 = -5n + 4n^2 + 1$

ମାତ୍ର $S_n = S_{n-1} + t_n \Rightarrow 3n + 4n^2 = -5n + 4n^2 + 1 + t_n$

$\Rightarrow t_n = 8n - 1$ .... (i)

$\therefore t_7 = 8 \times 7 - 1 = 55$ [(i) ରେ n = 7 ଲେଖିଲେ] (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଯଦି a^2, b^2, c^2 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ A.P ରେ ରହନ୍ତି, ତେବେ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ a^2, b^2, c^2 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ A.P. ରେ ରହିଛନ୍ତି ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାରେ $ab + bc + ca$ ଯୋଗ କଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ A.P. ରେ ରହିବେ । (ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - 3)

$\therefore a^2+ab + bc + ca, b^2 + ab + bc + ca, c^2 + ab + bc + ca$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\Rightarrow a(a+b) + c(a+b), b(a+b) + c(a+b), c(b+c)+a(b+c)$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\Rightarrow (a+b)(c+a), (a+b)(b+c), (b+c)(c+a)$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ $(a+b)(b+c)(c+a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$$\frac{(a+b)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$ A.P. ରେ ରହିବେ ।

$\therefore \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. ରେ ରହିବେ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 9 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ A.P. ର $t_{m+n} + t_{m-n} = 2t_m$

ସମାଧାନ : ମନେକର A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ d

$\therefore t_{m+n} = a + (m+n-1)d$ ଏବଂ $t_{m-n} = a + (m-n-1)d$

$t_{m+n} + t_{m-n} = (a+a) + (m+n-1 + m - n - 1)d = 2a + (2m - 2)d$

$= 2\{a+(m-1)d\} = 2t_m$

$\therefore t_{m+n} + t_{m-n} = 2t_m$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

(କ - ବିଭାଗ)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ ।

(i) 1, 2, 3, 4, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_8 = ... [(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9]

(ii) 2, 4, 6, 8, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_7 = ... [(a) 12 (b) 14 (c) 16 (d) 18]

(iii) -5, -3, -1, 1, ... ଅନୁକ୍ରମରେ t_{11} = ... [(a) 13 (b) 15 (c) 17 (d) 19]

(iv) 3, 6, 9, ... ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6]

(v) -4, -2, 0, 2, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ...[(a) -2 (b) -3 (c) 2 (d) 3]

(vi) 10.2,10.4, 10.6, 10.8, ... ରେ t_5 = ... [(a) 11.0 (b) 11.2 (c) 11.4 (d) 11.6]

(vii) 2.5, 2.9, 3.3, 3.7, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ...[(a) 1.5 (b) 1.4 (c) 0.5 (d) 0.4]

(viii) 3, x, 9, ... ଏକ A.P. ହେଲେ x = ... [(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7]

(ix) 1.01, 1.51, 2.01, 2.51, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) 1 (b) 0.5 (c) 1.5 (d) 1.05]

(x) 5, 0, -5, -10, ... A.P. ରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = ... [(a) –5 (b) 5 (c) –10 (d) 10]

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ A.P. ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର :

(i) 1, 4, 7, 10, 15, 16, 19, 22 (ii) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50

(iii) 1, 6, 11, 15, 22, 28, 34, 40 (iv) 1, 4, 7, 9, 11, 14, 17, 20

(v) –5, –3, –1, 0, 2, 4, 6, 8

(vi) a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, a + 7d

(vii) 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0 (viii) –7, –4, –1, 2, 5, 8, 11, 14

3. ପ୍ରଶ୍ନ 2 ରେ ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ A.P. ସେମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ନିରୂପଣ କର ।

4. ପ୍ରଥମ ପଦ a = 5 ନେଇ A.P. ର ପ୍ରଥମ ଚାରିଗୋଟି ପଦ ଲେଖ ଯେପରିକି ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର

(i) d = 5 (ii) d = 4 (iii) d = 2 (iv) d = –2 (v) d = –3 ହେବ ।

5. ଏକ A.P. ର n ତମ ପଦ t_n ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ t_5, t_8 ଓ t_{10} କେତେ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $t_n = \frac{n+1}{2}$ (ii) $t_n = -10 + 2n$

(iii) $t_n = 10n + 5$ (iv) $t_n = 4n - 6$

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ A.P. ଗଠନ କର (କେବଳ ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦ ତ୍ରୟ ଆବଶ୍ୟକ) ଯେଉଁଠାରେ

(i) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 4, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 3 (ii) ପ୍ରଥମ ପଦ a = -8, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –2

(iii) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 7, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –4 (iv) ପ୍ରଥମ ପଦ a = 10, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 5

(v) ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{2}$, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{3}{2}$ (vi) ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{2}$, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = –1

7. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ ବା ଠିକ୍ ଲେଖ ।

(a) 1, 2, 3, 4....... ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ସୃଷ୍ଟି କରନ୍ତି ।

(b) 1, –1, 1, –1,......... ଅନୁକ୍ରମଟି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ଅଟେ ।

(c) 2, 1, –1, –2 ସଂଖ୍ୟା ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ବିଦ୍ୟମାନ ।

(d) ଯେଉଁ ଅନୁକ୍ରମର $t_n = n - 1$, ତାହା ଏକ A. P. ଅଟେ ।

(e) ଯେଉଁ ଅନୁକ୍ରମର $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ ତାହା A. P. ଅଟେ ।

(f) ଯଦି କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2 : 3 : 4 ହୁଏ, ତେବେ କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣ ଗୋଟିଏ A.P. ଗଠନ କରିବେ ।

(g) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଗୋଟିଏ A.P. ରେ ରହିପାରିବେ ।

(h) ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାମାନେ A.P. ଗଠନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।

(i) 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏକ A.P. ଅଟନ୍ତି ।

(j) 5, x, 9 ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିଲେ $x = 6$

(ଖ – ବିଭାଗ)

8. (a) 1 + 2 + 3 + ... ରେ S_{30} କେତେ ? (b) 1 + 3 + 5 + ... ରେ S_{10} କେତେ ?

(c) 2 + 4 + 6 + ... ରେ S_{15} କେତେ ? (d) 1 – 2 + 3 – 4 + ... ରେ S_{30} କେତେ ?

(e) 1 – 2 + 3 – 4 + ... ରେ S_{41} କେତେ ? (f) 1+1 +2 + 2 + 3 + 3 ... ରେ S_{17} କେତେ ?

(g) 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 5 ... ରେ S_{39} କେତେ ?

(h) – 7 – 10 – 13 - ... ରେ S_{21} କେତେ ? (i) 10 + 6 + 2 + ... ରେ S_{15} କେତେ ?

(j) 20 + 9 – 2 + ... ରେ S_{25} କେତେ ? (k) n+(n– 1) + (n – 2) + ... ରେ S_n କେତେ ?

(l) $5 + 4\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} +$ ... ରେ S_{20} କେତେ ?

9. (a) ଯଦି $a = 3, d = 4, n = 10$, ତେବେ S_n କେତେ ?

(b) ଯଦି $a = -5, d = -3$, ତେବେ S_{17} କେତେ ?

(c) ଯଦି $t_n = 2n - 1$, ତେବେ ପ୍ରଥମ 5 ଟି ପଦ ଲେଖ ।

(d) ଯଦି $t_n = 3n + 2$, S_{61} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(e) ଯଦି $t_n = 3n - 5$, ତେବେ S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(f) ଯଦି $t_n = 2 - 3n$, ତେବେ S_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(g) ଯଦି $S_n = n^2$, ତେବେ t_{15} କେତେ ?

(h) ଏକ A. P. ର $a = 3, d = 4, S_n = 903$, ତେବେ n କେତେ ?

(i) ଏକ A. P. ର $d = 2, S_{15} = 285$, ତେବେ a କେତେ ?

(j) ଏକ A. P. ର $t_{15} = 30, t_{20} = 50$, ତେବେ S_{17} କେତେ ?

10. (i) 'ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା କୌଶଳରେ' ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 1 ଠାରୁ 105 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(b) 25 ଠାରୁ 93 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(c) 111 ଠାରୁ 222 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) 1, 2, 3, ... ଅନୁକ୍ରମର

(a) S_{20} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (b) S_{50} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) 32 ଠାରୁ 85 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) 100 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) 150 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ଗ - ବିଭାଗ)

11. ଯେଉଁ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମ ପଦ 17 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର – 2 ତାହାର କେତୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି 72 ହେବ ? ଏହାର ଦୁଇଟି ଉତ୍ତର ମିଳିବାର କାରଣ ଲେଖ ।

12.(i) ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନୋଟି ରାଶିର ଯୋଗଫଳ18 ଏବଂ ଗୁଣଫଳ 192 ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ $a - d, a, a + d$ ହିସାବରେ ନେଇ ପ୍ରଶ୍ନଟି ସମାଧାନ କର ।)

(ii) ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ଛଅଟି ପଦ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରାନ୍ତ ପଦଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ 16 ଏବଂ ମଧ୍ୟ ପଦଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 63 ହେଲେ, ପଦଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ମନେକର ରାଶିଗୁଡ଼ିକ $a - 5d, a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ ଏବଂ $a + 5d$)

13. ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଅବସ୍ଥିତ ତିନୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ 21 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ 155; ପଦଗୁଡ଼ିକ କେତେ ?

14. ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଥିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ 3 : 4 : 5 ହେବ ।

15. 100 ରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏବଂ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. 200 ରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଓ 3 ଦ୍ୱାରା ଅବିଭାଜ୍ୟ ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(**ସୂଚନା :** $1+2+....+199$ ଓ $3+6+....+198$ ନିରୂପଣ କରି ପ୍ରଥମରୁ ଦ୍ୱିତୀୟକୁ ବିୟୋଗ କର ।)

17. 15 କୁ ଏପରି 3 ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କର ଯେପରିକି ସେମାନେ ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ରହିବେ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 120 ହେବ ।

18. A. P. ରେ ଥିବା ତିନୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ 15 ଏବଂ ପ୍ରାନ୍ତ ପଦଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ 58 ହେଲେ ପଦତ୍ରୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

19. A. P. ରେ ଥିବା ଚାରୋଟି ପଦ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରାନ୍ତ ପଦ ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ 8 ଏବଂ ମଧ୍ୟ ପଦଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 15 ହେଲେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର ।

(**ସୂଚନା :** ପଦମାନଙ୍କୁ $a - 3d, a - d, a + d$ ଏବଂ $a + 3d$ ମନେକରି ସମାଧାନ କର ।)

20. A. P. ରେ ଥିବା ତିନୋଟି ରାଶିମାଳାର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି S_1, S_2 ଏବଂ S_3 । ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିମାଳାର ପ୍ରଥମ ପଦ 1 ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3 ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $S_1 + S_3 = 2S_2$

21. ଏକ A.P. ର ତମ, P - ତମ, q - ତମ ଏବଂ r - ତମ ପଦଗୁଡ଼ିକର ମାନ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଏବଂ c ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$

22. ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା a, b, c ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ।

(i) $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$

(ii) $b + c, c + a, a + b$

(iii) $b + c - a, c + a - b, a + b - c$

(iv) $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \frac{1}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(v) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$

23. (i) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A.P ରେ ରହିଲେ ଏବଂ $a + b + c \neq 0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ ମଧ୍ୟ A.P.ରେ ରହିବେ ।

(ii) $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ଅନୁକ୍ରମ A.P ରେ ରହିଲେ ଏବଂ $a + b + c \neq 0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P.ରେ ରହିବେ ।

24. ଯଦି କୌଣସି A.P.ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଏବଂ ଶେଷ ପଦ l ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମରୁ r- ତମ ପଦ ଏବଂ ଶେଷରୁ r-ତମ ପଦର ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରଥମ ଓ ଶେଷ ପଦର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ।

25. ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ p ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି r, ପ୍ରଥମ q ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି s ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d, ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{r}{p} - \frac{s}{q} = (p - q)\frac{d}{2}$ ହେବ ।

26. ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର ପ୍ରଥମ p, q, r ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି a,b,c ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ ହେବ ।

27. କୌଣସି A.P. ର $t_p = q, t_q = p$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $t_m = p + q - m$ ।

ସୂଚନା : $a+(p-1)d = q$ ଓ $a+(q-1)d = p$ କୁ ସମାଧାନ କରି a ଓ d ନିରୂପଣ କରି t_{pq} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

28. କୌଣସି A.P. ର $S_m = n, S_n = m$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $S_{m+n} = -(m+n)$ ହେବ ।

3.3. ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର (Difference formula) :

ପୂର୍ବରୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥିବା ପଦମାନଙ୍କର ମିଶାଣ ପାଇଁ 'ଓଲଟାଇ ମିଶାଇବା' କୌଶଳ ତୁମେ ଜାଣିଛ । ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ କୌଶଳ **'ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର'** ମଧ୍ୟ ଏକ ସୁନ୍ଦର କୌଶଳ ଯାହାର ପ୍ରୟୋଗ ବିଷୟରେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଜାଣିବା ।

ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\left[\because \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\right]$

ଏହି ସୂତ୍ରଟିକୁ **ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର** କୁହାଯାଏ । କାରଣ ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ପଦକୁ ଦୁଇଟି ପଦର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି । ଏହି ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପାଇବା : $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$ ଏବଂ $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 10 : $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}$ ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଅନ୍ତର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ମିଶାଇଲେ, $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore S_n=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ (ଉତ୍ତର)

ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର କୌଶଳ ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ, ଯାହାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

(i) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) ର ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର $S_n = 1 + 2 + 3 + ... n$

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = 1, ପଦସଂଖ୍ୟା= n

$$S_n = \frac{n}{2}\{2x1+(n-1)1\} = \frac{n}{2}(2+n-1) = \frac{n(n+1)}{2} \text{.............}(1)$$

ସୂତ୍ର : $\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

(ii) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Odd Natural Numbers) ମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ**

ମନେକର, $S_n = 1 + 3 + 5 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ = 1, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର = 2, ପଦସଂଖ୍ୟା = n

$$S_n = \frac{n}{2}\{2x1+(n-1)2\} = \frac{n}{2}(2+n-2) = \frac{n}{2}.2n = n^2 \text{.............}(2)$$

ସୂତ୍ର : $\boxed{1 + 3 + 5 + ... + n \text{ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ } = n^2}$

(iii) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Even Natural Numbers) ମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର, $S_n = 2 + 4 + 6 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

= 2 (1+ 2 + 3 + ... n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

$= 2 . \frac{n(n+1)}{2} = n(n + 1)$; [(1) ସାହାଯ୍ୟରେ] ....(3)

ସୂତ୍ର : $\boxed{2 + 4 + 6 + ... + n \text{ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ } = n(n + 1)}$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବର୍ଗର ଯୋଗଫଳ ତଥା ଘନର ଯୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କରାଯିବ । ଏଥିପାଇଁ ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦର ପ୍ରାରମ୍ଭରେ ଆଲୋଚିତ ଅନ୍ତର ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ ।

(A) **ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର (Squares of Natural Numbers) ଯୋଗଫଳ :**

ମନେକର, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2+3n-1) = 3n^2 - 3n +1$

ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ଯାହାକି ଏକ ଅନ୍ତର ଅଟେ । ଏଥିରେ n ବଦଳରେ 1, 2, 3, 4............ ଇତ୍ୟାଦି କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

....

....

$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$

$n^3 - (n-1)^3 = 3 . n^2 - 3 . n + 1$

$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ପଦଗୁଡ଼ିକ ଯୋଗ କରିବାରୁ

$\Rightarrow n^3 = 3S_n - 3 . \frac{1}{2} n(n+1) + n$ (ସୂତ୍ର (1) ଅନୁସାରେ)

$\Rightarrow -3S_n = -n^3 + n - \frac{3n}{2}(n+1) \Rightarrow 3S_n = n^3 - n + \frac{3n}{2}(n+1)$

$= n(n^2 - 1) + \frac{3n}{2}(n+1)$

$= n(n+1) \{(n-1) + \frac{3}{2}\} = n(n+1)\left(\frac{2n-2+3}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .... (4)

ସୂତ୍ର : $\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(B) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଘନ (Cubes of Natural Numbers)ର ଯୋଗଫଳ :

ମନେକର, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ r^2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, $r^2 (r+1)^2 - (r-1)^2 \ r^2 = 4r^3$

ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ଓ r ବଦଳରେ 1, 2, 3............. n ଲେଖିଲେ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ n ଗୋଟି ଧାଡ଼ି ପାଇବା ।

$1^2 . 2^2 - 0^2 . 1^2 = 4 . 1^3$

$2^2 . 3^2 - 1^2 . 2^2 = 4 . 2^3$

$3^2 . 4^2 - 2^2 . 3^2 = 4 . 3^3$

....

....

$(n-1)^2 . n^2 - (n-2)^2 . (n-1)^2 = 4(n-1)^3$

$n^2 (n+1)^2 - (n-1)^2 . n^2 = 4n^3$

ଯୋଗକଲେ, $n^2 (n+1)^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3)$

$\therefore 4S_n = n^2 (n+1)^2$

$\therefore S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ....(5)

ସୂତ୍ର : $\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n)^2}$

ଅର୍ଥାତ୍ **n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନର ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳର ବର୍ଗ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।**

ବି.ଦ୍ର. : $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ ମଧ୍ୟ S_n ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରିବ ।

Σ ଚିହ୍ନ (Sigma notation) :

ସୁବିଧା ସକାଶେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ସିଗ୍‌ମା (Σ) ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n = \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2 = \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3 = \Sigma n^3 = \left\{\frac{n(n+1)^2}{2}\right\}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ପାଇଁ (1) ଠାରୁ (5) ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $\Sigma n(n+1) = \Sigma(n^2+n) = \Sigma n^2 + \Sigma n,$

$$\Sigma(n+1)(n+2) = \Sigma(n^2+3n+2) = \Sigma n^2 + 3\Sigma n + \Sigma 2 = \Sigma n^2 + 3\Sigma n + 2n$$

ଉଦାହରଣ - 11 : $1 . 2 + 2 . 3 + 3. 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n(n+1)$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_n = n(n+1)$ ମନେକର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ଯୋଗଫଳ $= S_n$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \Sigma n(n+1) = \Sigma(n^2+n) = \Sigma n^2 + \Sigma n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.\frac{2(n+2)}{3} = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା : Σn^2 ଓ Σn ସୂତ୍ରଦ୍ୱୟର ସିଧାସଳଖ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -12 : $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...$ର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $t_n = n(n+1)(n+2) = n(n^2+3n+2) = n^3+3n^2+2n$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \Sigma(n^3+3n^2+2n) = \Sigma n^3 + 3\,\Sigma n^2 + 2\Sigma n$$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

[$\Sigma n^3, \Sigma n^2, \Sigma n$ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି)

$$= \frac{\{n(n+1)\}^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)}{4}\ \{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n+4n+2+4) = \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+2n+3n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)\{n(n+2)+3(n+2)\}}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$ (ଉତ୍ତର)

ଟୀକା : ଆମକୁ ଯଦି ଦତ୍ତ ପ୍ରଥମ 10 ଗୋଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ କୁହାଯାଇଥାଆନ୍ତା ତେବେ S_n ରେ $n = 10$ ନେଇ S_{10} ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

$S_{10} = \dfrac{10 \times 11 \times 12 \times 13}{2} = 8580$ ଉତ୍ତର ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିଥାନ୍ତା ।

ଉଦାହରଣ - 13 : $1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + ...$ ର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ n ତମ ପଦଟି $t_n = (1+2+.....+n) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{n}{2}$

$$\therefore S_n = \Sigma t_n = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{n(n+1)(2n+4)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1(n+2)$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ...$ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଯୋଗଫଳରେ n ତମ ପଦ t_n ହେଲେ

$$t_n = \{1 + (n-1)\,2\}^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

$$\therefore\ S_n = \Sigma t_n = 4\,\Sigma n^2 - 4\,\Sigma n + \Sigma 1$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = 2n\,(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) + n$$

$$= \frac{2n(n+1).2(n-1)}{3} + n = \left\{\frac{4n(n^2-1)}{3} + n\right\} = n\left(\frac{4n^2-4}{3} + 1\right) = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$

$$S_n = \frac{n}{3}(4n^2-1)$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ...$ (n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏହି ସ୍ଥଳରେ ଯଦିଓ ଦତ୍ତ ରାଶିମାଳା A.P ନୁହଁନ୍ତି ତଥାପି କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଅନ୍ତରଗୁଡ଼ିକ (ଅର୍ଥାତ୍ 2,3,4,5,.... ଇତ୍ୟାଦି) A.P. ଅଟନ୍ତି ।

$$S_n = 1 + 3 + 6 + \ .... + t_{n-1} + t_n$$

ପୁନଶ୍ଚ $S_n = \quad 1 + 3 + \ .... + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$ (ଗୋଟିଏ ପଦକୁ ଘୁଞ୍ଚାଇ ଲେଖାଯାଇଛି)

ବିୟୋଗ କଲେ, $0 = 1 + (3-1) + (6-3) + (10-6) + \ .... + (t_n - t_{n-1}) - t_n$

$\therefore\ t_n = 1 + 2 + 3 + ...+ n$ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

$$\Rightarrow\ t_n = \frac{1}{2}n\,(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S_n = \Sigma t_n = \frac{1}{2}\Sigma n^2 + \frac{1}{2}\Sigma n = \frac{1}{2}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\ \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\left\{\frac{(2n+1)}{3} + 1\right\} = \frac{1}{4}\ \frac{n(n+1)(2n+4)}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

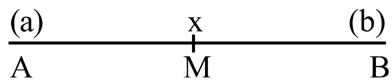
$$\therefore S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$ (ଉତ୍ତର)

3.4 ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (Arithmetic mean) :

ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ଦିଆଯାଇଥିଲେ ସେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ $x = \frac{a+b}{2}$

ଜ୍ୟାମିତିକ ଅନୁଶୀଳନ ମାଧ୍ୟମରେ ବିଚାର କରିବା ।

$\overline{AB}$ ର A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b (b > a) ।



(ଚିତ୍ର 3.1)

$\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ M ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $x = \frac{a+b}{2}$ (ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ)

ଏଠାରେ a, $\frac{a+b}{2}$, b ରାଶିତ୍ରୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (A.P.) ରେ ରହନ୍ତି କାରଣ,

$\frac{a+b}{2} - a = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = d$ (ସାଧରଣ ଅନ୍ତର) [ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b–a]

a, $\frac{a+b}{2}$, b A.P. ରେ ରହିଲେ $\frac{a+b}{2}$ କୁ a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ବା A.M. କୁହାଯାଏ ।

ସୂତ୍ର : $\boxed{A.M. = \frac{a+b}{2}}$ (ଯେଉଁଠାରେ a, $\frac{a+b}{2}$, b A.P. ରେ ଅଛନ୍ତି)

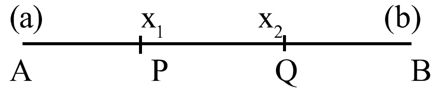
ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 7 ଓ 15 ର $A.M. = \frac{7+15}{2} = \frac{22}{2} = 11$, ସେହିପରି –1 ଓ 10 ର $AM = \frac{-1+10}{2} = 4.5$ ଇତ୍ୟାଦି ।

3.4.1 ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ A.M. ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(i) ମନେକର a ଓ b ଦତ୍ତ ରାଶି । ପ୍ରଥମେ ଏହି ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଗୋଟି A.M. ଯଥା x_1 ଓ x_2 ସ୍ଥାପନ କରିବା । ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟକର ସ୍ଥାପନ ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଦୁଇ ଭାଗ କରି ବାକୁ ପଡ଼ିଥିଲା । $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଟିକୁ ସୂଚାଉ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା $\frac{a+b}{2}$, a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ । ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟକ ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ କୁ ସମାନ ତିନି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{b-a}{3}$ ଯାହା a, x_1, x_2, b ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d ସହ ସମାନ। ଅତଏବ ଏଠାରେ $d = \frac{b-a}{3}$ । ($\because$ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b–a)

ସୁତରାଂ $x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}$ ଏବଂ

$$x_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{3}\right) = \frac{a+2b}{3}$$

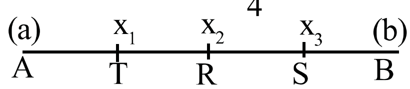


(ଚିତ୍ର 3.2)

ଅତଏବ ଦୁଇଟି ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଦ୍ୱୟ $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$ ....(iii)

(ii) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି A.M. ସ୍ଥାପନ କରିବା ।

a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଯଥା x_1, x_2 ଓ x_3 ହୁଅନ୍ତୁ । ଏଠାରେ a, x_1, x_2, x_3, b ପାଞ୍ଚ ଗୋଟି ରାଶି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ରେ ରହିବେ । x_1, x_2 ଓ x_3 କୁ a ଓ b ମାଧ୍ୟମରେ ଜାଣିବା ପାଇଁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଚାରି ଭାଗ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $d = \frac{b-a}{4}$ । ($\because$ $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = b – a)



(ଚିତ୍ର 3.3)

$x_1 = a + d = a + \frac{b-a}{4} = \frac{3a+b}{4}$, $x_2 = a + 2d = a + 2 \times \frac{b-a}{4} = \frac{a+b}{2}$

ଏବଂ $x_3 = a + 3d = a + 3 \times \frac{b-a}{4} = \frac{a+3b}{4}$

$\therefore$ ଦୁଇଟି ରାଶି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକତ୍ରୟ $\frac{3a+b}{4}$, $\frac{a+b}{2}$ ଏବଂ $\frac{a+3b}{4}$ ...... (iv)

(iii) ସେହିପରି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M.) ସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେଲେ $\overline{AB}$ କୁ (n+1) ସମାନ ଭାବେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ; ଯେଉଁଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{b-a}{n+1}$ ହେବ । ଯଦି ମଧ୍ୟକଗୁଡ଼ିକ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ, $x_1 = a + \frac{b-a}{n+1}$, $x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$, $x_3 = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$, ..., $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$ ହେବ ।

ଏଠାରେ, $a, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n, b$ A.P. ରେ ରହିବେ, ଯାହାର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{n+1}$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 16 : 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ (i) ଗୋଟିଏ (ii) ଦୁଇଗୋଟି (iii) ତିନିଗୋଟି (iv) ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M.) ସ୍ଥାପନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 2$ ଓ $b = 62$ । $\therefore b - a = 60$

(i) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି x_1 ହେଲେ, $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = 2 + \frac{60}{2} = 2 + 30 = 32$

$\therefore$ 32, 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(ii) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଦ୍ୱୟ x_1 ଓ x_2 ହେଲେ, $2, x_1, x_2, 62$ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି ବିଶିଷ୍ଟ ଓ ଏଠାରେ

ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{3} = \frac{60}{3} = 20$

$\therefore x_1 = a + d = 2 + 20 = 22$ ଏବଂ $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 20 = 42$ ।

$\therefore$ 22 ଓ 42, 2 ଏବଂ 62 ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(iii) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ତ୍ରୟ x_1, x_2 ଓ x_3 ହେଲେ,

$2, x_1, x_2, x_3, 62$ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{4} = \frac{60}{4} = 15$ । ତେଣୁ

$x_1 = a + d = 2 + 15 = 17$, $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 15 = 32$ ଏବଂ $x_3 = a + 3d = 2 + 3 \times 15 = 47$ ।

$\therefore$ 17, 32 ଓ 47, 2 ଓ 62 ମଧ୍ୟରେ ତିନୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(iv) ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଚାରିଟି x_1, x_2, x_3 ଓ x_4 ହେଲେ,

$2, x_1, x_2, x_3, x_4, 62$ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ଏବଂ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର $d = \frac{b-a}{5} = \frac{60}{5} = 12$ । ଅତଏବ

$x_1 = a + d = 2 + 12 = 14$, $x_2 = a + 2d = 2 + 2 \times 12 = 26$, $x_3 = a + 3d = 2 + 3 \times 12 = 38$,

ଏବଂ $x_4 = a + 4d = 2 + 4 \times 12 = 50$ ।

$\therefore$ 14, 24, 38 ଓ 50, 2 ଏବଂ 62 ମଧ୍ୟରେ ଚାରୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) $\frac{1}{15 \times 16} = ... - \frac{1}{16}$ (b) $\frac{1}{12 \times 11} = \frac{1}{11} - ....$

(c) $\frac{1}{n(n+1)} = ... - \frac{1}{n+1}$ (d) $\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - ....$

(e) 5 ଓ 9 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି ....

(f) x ଓ 7 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି 5 ହେଲେ x = ...

(g) (a+b) ଓ (a–b) ମଧ୍ୟରେ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକଟି ....

(h) ଦୁଇଟି ରାଶିର A.M. 11, ଯଦି ଗୋଟିଏ ରାଶି 7 ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟଟି ....

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$ ... ... 20 ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ;

(b) $\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8}$ ... ... 16 ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ;

3. (a) 7 x 15 + 8 x 20 + 9 x 25 +...ର t_n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) $6\Sigma n^2 + 4\Sigma n^3$ ର ସରଳୀକୃତ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) 1 x 2 + 2 x 3 + 3 x 4 ... + n (n + 1) ପାଇଁ S_n ଓ S_{20} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(d) 1 x 3 + 2 x 4 + 3 x 5 ... ର t_n, S_n ଓ S_{10} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକର n ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 1. 1. + 2. 3. + 3. 5 + 4. 7 + ... (b) 1 . 3 + 3 . 5 + 5 . 7 + 7 . 9 + ...

(c) 3 . 8 + 6 . 11 + 9 . 14 + ... (d) 1 + (1 + 3) + (1 +3 + 5) + ...

(e) $1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + ...$ (f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ...$

(g) $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + ...$

(h) $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + ...$

5. 15 ଓ 27 ମଧ୍ୟରେ (i) ଗୋଟିଏ ଓ (ii) ଦୁଇଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

6. 12 ଓ 36 ମଧ୍ୟରେ (i) ଦୁଇଗୋଟି ଓ (ii) ତିନିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

7. 6 ଓ 46 ମଧ୍ୟରେ (i) ଦୁଇଗୋଟି ଓ (ii) ଚାରିଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

8. 5 ଓ 65 ମଧ୍ୟରେ (i) ତିନିଗୋଟି ଓ (ii) ପାଞ୍ଚଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

9. 11 ଓ 71 ମଧ୍ୟରେ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସ୍ଥାପନ କର ।

10. 20 ଓ 80 ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ A.M. ଅଛି । ଯଦି ପ୍ରଥମ ମଧ୍ୟକ : ଶେଷ ମଧ୍ୟକ = 1:3 ହୁଏ ତେବେ, n ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

11. A.P. ରେ ଥିବା ଚାରିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଯୋଗଫଳ 2 ଏବଂ ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟକ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର 10 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ

ସମ୍ଭାବ୍ୟତା

(PROBABILITY)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ "ସମ୍ଭାବ୍ୟତା" ସଂପର୍କରେ ଅବଗତ ହୋଇ ସାରିଛ । ଏକ ପରୀକ୍ଷଣ (Experiment) ଏବଂ ଏହାର ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (observation) ରୁ ଆସୁଥିବା ଫଳାଫଳକୁ ଆଧାର କରି "ସମ୍ଭାବ୍ୟତା"କୁ ସଂଖ୍ୟାରେ ମାପ କରାଯାଉଥିବାର ସୂଚନା ମଧ୍ୟ ପାଇ ସାରିଛ । ଏକ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା(Empirical Probability) ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସାଧାରଣତଃ ଏକ ପ୍ରକୃତ ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଉଦ୍ଭବ ଘଟଣାଟିର ବାରମ୍ବାରତା ଏବଂ ପରୀକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟା ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ; ଏହା ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ ଏବଂ ଏହାକୁ ଆଧାର କରି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଛ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଉପରେ ଆଧାରିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର କିଛି ଧାରଣା ମଧ୍ୟ ହାସଲ କରିଛ ।

ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତତ୍ତ୍ୱାଧାରିକ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା (Theoretical Probability) ଜାଣିବା ସହ କେତେକ ଘଟଣା ସହ ଜଡ଼ିତ ବିଭିନ୍ନ ପଦ ସଂପର୍କିତ ଧାରଣା ଏବଂ 'ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ'କୁ ଆଧାର କରି ଘଟଣା କିମ୍ବା ଘଟଣାବଳୀ ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସଂପର୍କରେ ଜାଣିବ ।

4.2 ଆନୁଭବିକ ଏବଂ ତତ୍ତ୍ୱାଧାରିକ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା (Empirical and Theoretical Probability) :

ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା ସାଧାରଣତଃ ପରୀକ୍ଷଣ (Experiments) ଏବଂ ଏହାର ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (observations) ଉପରେ ଆଧାରିତ ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପରୀକ୍ଷା ସିଦ୍ଧ ହୋଇଥାଏ । ଏହାକୁ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ଜାଣିଛ । ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଉଦ୍ଭବ ଫଳାଫଳର ପ୍ରକୃତ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଇ ଘଟଣାଟିର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ ସମ୍ଭବ । ଏହି ପ୍ରକାରର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣକୁ **ଅନୁଭବ ସିଦ୍ଧ ବା ଆନୁଭବିକ (Empirical) ସମ୍ଭାବ୍ୟତା** କୁହାଯାଏ । ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଦତ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣ -1 କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜାଣିବା ଯେ, ମୁଦ୍ରାର ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର କ୍ରମାଗତ ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H କିମ୍ବା T ସଂଖ୍ୟାକୁ ଲିପିବଦ୍ଧ କରି P(H) କିମ୍ବା P(T) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଗଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଓ 0.5 ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ କ୍ରମେ କ୍ରମେ କମି ଆସୁଛି । ସେହିପରି ପରୀକ୍ଷଣ - 2 ରେ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାର ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳାଫଳ (1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6)ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 0.166 କିମ୍ବା $\frac{1}{6}$ ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି ।

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{1}{2}$ ଓ $\frac{1}{6}$ ପାଇଲେ; ଯାହା ପରୀକ୍ଷା ସିଦ୍ଧ ବା ଅନୁଭବ ସିଦ୍ଧ ।

$\therefore$ 'ଘଟଣା'ର ଆନୁଭବିକ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= \dfrac{\text{ଆବଶ୍ୟକ ଫଳଟିର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ପରୀକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟା}}$

ଆନୁଭବିକ (Empirical) ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ ଆଧାରରେ ନିମ୍ନ କେତେକ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 1 - ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 20 ଥର ଟସ୍ କରିବାରୁ 7 ଥର T ଆସିଲେ P(T) ଓ P(H) ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ :- ସମୁଦାୟ 20 ଥର ଟସ୍‌ରୁ 7 ଥର 'T' ଆସିଲେ, 'H' ଆସିବ 13 ଥର ।

$P(T) = \dfrac{\text{T ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{7}{20}$ ଏବଂ $P(H) = \dfrac{\text{H ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{13}{20}$

ଉଦାହରଣ - 2 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 30 ଥର ଗଡ଼ାଇଲେ ସଂଖ୍ୟା 1 ଓ 2 ପ୍ରତ୍ୟେକେ 4 ଥର, ସଂଖ୍ୟା 3,4 ଓ 5 ପ୍ରତ୍ୟେକ 5 ଥର ପଡ଼ିଲେ P (6) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ - ଏଠାରେ 1 ର ବାରମ୍ବାରତା = 4, 2 ର ବାରମ୍ବାରତା = 4,
3 ର ବାରମ୍ବାରତା = 5, 4 ର ବାରମ୍ବାରତା = 5 ଓ
5 ର ବାରମ୍ବାରତା = 5

$\therefore$ 6 ର ବାରମ୍ବାରତା $= 30 - (4 + 4 + 5 + 5 + 5) = 7$

$P(6) = \dfrac{\text{6 ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ସମୁଦାୟ ଗୋଟି ଗଡ଼ିବା ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{7}{30}$

ଉଦାହରଣ - 3 : ଏକ ଫୁଟବଲ୍ ଖେଳରେ 15 ଟି ଗୋଲ୍ ହୋଇଥିଲା । ଯଦି ଗୋଟିଏ ପକ୍ଷ 5 ଟି ଗୋଲ୍ ଦେଇଥାନ୍ତି, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷ ଗୋଲ୍ ଦେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ :- ଅନ୍ୟପକ୍ଷର ଗୋଲ୍ ଦେବାର ଘଟଣାକୁ E ନିଆଯାଉ ।

E ର ବାରମ୍ବାରତା $= 15 - 5 = 10$

$P(E) = \dfrac{\text{E ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ସମୁଦାୟ ଗୋଲ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

ଉଦାହରଣ - 4 : ଏକ ଫାଟକକୁ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥିବା ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଯାନବାହନମାନଙ୍କର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅଟେ ।

P (କାର୍) = $\frac{1}{4}$, P (ଟ୍ରକ୍) = $\frac{1}{8}$, P (ଦୁଇ ଚକିଆ ଗାଡ଼ି) = $\frac{1}{2}$ ଓ P (ଟ୍ରାକଟର) = $\frac{1}{8}$

ଯଦି ପ୍ରତି ଦିନ ହାରାହାରି 4000 ଖଣ୍ଡ ଯାନ ଫାଟକ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥାଏ ତେବେ ଯାନବାହନଗୁଡ଼ିକର ମୋଟାମୋଟି ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର କାର, ଟ୍ରକ୍, ଦୁଇଚକିଆ ଗାଡ଼ି ଓ ଟ୍ରାକଟର୍‌ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ x, y, z ଓ w ।
ଅତଏବ $n = x + y + z + w = 4000$ (n = ମୋଟ ଯାନବାହନ ସଂଖ୍ୟା) ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{x}{n} = \frac{1}{4}, \frac{y}{n} = \frac{1}{8}, \frac{z}{n} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{w}{n} = \frac{1}{8}$

କିମ୍ବା $\frac{x}{4000} = \frac{1}{4}, \frac{y}{4000} = \frac{1}{8}, \frac{z}{4000} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{w}{4000} = \frac{1}{8}$

$x = \frac{4000}{4} = 1000,\ y = \frac{4000}{8} = 500,\ z = \frac{4000}{2} = 2000$ ଓ $w = \frac{4000}{8} = 500$

$\therefore$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ ହାରାହାରି 1000 କାର, 500 ଟ୍ରକ, 2000 ଦୁଇଚକିଆ ଗାଡ଼ି ଓ 500 ଟ୍ରାକ୍‌ଟର ଫାଟକ ଅତିକ୍ରମ କରନ୍ତି ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

1. ଅଷ୍ଟାଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଫରାସୀ ପ୍ରକୃତିବିଦ୍ Comte de Buffon ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 4040 ଥର ଟସ୍ କରି ଜାଣିଲେ ଯେ, H, 2048 ଥର ଆସୁଛି ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{2048}{4040} = 0.507$

2. ବ୍ରିଟେନ୍‌ର ଗଣିତଜ୍ଞ J.E. Kerrich, 10000 ଥର ମୁଦ୍ରାଟସ୍ କରି ଦେଖିଲେ ଯେ, 5067 ଥର H ଆସୁଛି ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{5067}{10000} = 0.5067$

3. Karl Pearson, 24000 ଥର ମୁଦ୍ରାଟସ୍ କରି 12012 ଥର 'H' ଆସିବାର ଦେଖିଥିଲେ ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ 'H' ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{12012}{24000} = 0.5005$

ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରୀକ୍ଷଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ଏଠାରେ ଆମେ କହି ପାରିବା କି, ଏକ ଲକ୍ଷ ବା ଦଶ ଲକ୍ଷ ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ କରି ଆସୁଥିବା 'H' ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

ପୂର୍ବ ଅନୁଭୂତିରୁ କହିପାରିବା ଯେ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ 'H' ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 0.5 ବା $\frac{1}{2}$ । ସେହିପରି ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳାଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $\frac{1}{6}$ ହେବ । ଏହାକୁ **ତତ୍ତ୍ୱାଧାରିକ (Theoretical) ସମ୍ଭାବ୍ୟତା** କୁହାଯାଏ; ଯାହା ପୂର୍ବରୁ ପରୀକ୍ଷଣ ସିଦ୍ଧ । ଉକ୍ତ ତତ୍ତ୍ୱ ଆଧାରିତ ଧାରଣା ସିଧାସଳଖ ଭାବରେ ଯେକୌଣସି ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିର୍ଣ୍ଣୟରେ ସାହାଯ୍ୟ କରିଥାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : Theoretical probability କୁ Classical Probability ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ଯଦି "ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇଲେ 4 ରୁ କମ୍ ପଡ଼ିବା" ଏକ ଘଟଣା ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଘଟଣା ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ (favourable) ଅଥବା ଘଟଣାର ଅନୁକୂଳ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ 1,2 ଓ 3

$\therefore$ ଘଟଣା ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା = 3

ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା = 6

$$\text{ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା} = \frac{\text{ଘଟଣା ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା}}{\text{ପରୀକ୍ଷଣର ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ଉକ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାକୁ ତତ୍ତ୍ୱାଧାରିକ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା (Theoretical or Classical probability) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାଗ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସମଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଲାଲ୍, ନୀଳ ଏବଂ ହଳଦିଆ ଗୋଟି ଥିଲା । ଅନିନ୍ଦିତା ବ୍ୟାଗ୍ ଭିତରକୁ ନ ଚାହିଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟି କାଢ଼ିଲା । ଗୋଟିଏ ଲାଲ୍, ଗୋଟିଏ ନୀଳ ବା ଗୋଟିଏ ହଳଦିଆ ଗୋଟି ବାହାରିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର Y ହେଉଛି ଏକ ଘଟଣା "ବ୍ୟାଗ୍‌ରୁ ବାହାରିଥିବା ହଳଦିଆ ଗୋଟି" । ସେହିପରି B ଏବଂ R ଯଥାକ୍ରମେ ନୀଳ ଏବଂ ଲାଲ୍ ଗୋଟି ବାହାରିବାର ଘଟଣା ।

ଏଠାରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା = 3 ଏବଂ Y ଘଟଣା ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳ ସଂଖ୍ୟା = 1

$\therefore P(Y) = \frac{1}{3}$ । ସେହିପରି $P(B) = \frac{1}{3}$ ଏବଂ $P(R) = \frac{1}{3}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) $P(Y) + P(B) + P(R) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

(ii) ପରୀକ୍ଷଣରେ ଏକ ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଘଟଣାଟିକୁ ମୌଳିକ ଘଟଣା (Elementary Event) କୁହାଯାଏ । ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରେ Y, B ଏବଂ R ଘଟଣାର ଫଳାଫଳ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ 1 ହୋଇଥିବାରୁ ଏଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ଘଟଣା ଅଟନ୍ତି ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ମୌଳିକ ଘଟଣା ଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି 1 ।

ଉଦାହରଣ - 7 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ (i) '4' ରୁ ଅଧିକ ଲେଖାଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ (ii) 4 କିମ୍ବା 4 ରୁ କମ୍ ଲେଖାଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ଘଟଣା 'E' = 4 ରୁ ଅଧିକ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା । ଏଠାରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 6 । ଘଟଣା E ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 5 ଏବଂ 6 ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 2 ।

$\therefore P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) ଘଟଣା 'F' = "4 କିମ୍ବା 4 ରୁ କମ୍ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା" । ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 6 । ଘଟଣା F ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1, 2, 3 ଏବଂ 4 ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 4 ।

$\therefore P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $P(E) + P(F) = 1$ .... (i)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(1) ଘଟଣା ‘E’ ଏବଂ ‘F’ ଦ୍ୱୟକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ଘଟଣା ‘E’ = 4 ରୁ ଅଧିକ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଘଟଣା ‘F’ = 4 କିମ୍ବା 4 ରୁ କମ୍ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ।

4 ରୁ ଅଧିକ ଲେଖା ନ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଘଟଣା, F ଘଟଣା ସହ ସମାନ ।

4 ରୁ ଅଧିକ ଲେଖା ନ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯଦି ଘଟଣା $\overline{E}$ କିମ୍ବା E' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ତେବେ $P(\overline{E}) = P(F)$

$\therefore P(E) + P(\overline{E}) = 1$ [(i) ରୁ $\Rightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

ମନେରଖ : ଯେକୌଣସି ଘଟଣା E ପାଇଁ $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

(2) ଘଟଣା $\overline{E}$ ଘଟଣା E ର **ପରିପୂରକ ଘଟଣା** । ଅର୍ଥାତ୍ E ଏବଂ $\overline{E}$ କିମ୍ବା E' ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ପରିସ୍ପର ପରିପୂରକ ନୁହନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 8 : ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କଲେ, ଟସ୍‌ରେ ଅତିକମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ (H) ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କରିଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ HH, HT, TH ଓ TT ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 4 ।

ଘଟଣା E ଅତିକମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ H ଆସିବା ଏକ ଘଟଣା ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, HH, HT, TH ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା = 3

$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାର ଟସ୍‌ରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ H ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{3}{4}$

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣିଛୁ $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(ଯେଉଁଠାରେ $P(\overline{E})$ = ଘଟଣା “ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାର ଟସ୍‌ରେ କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ’’ ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{1}{4}$)

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର “ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାର ଟସ୍‌ରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ H ଆସିବା” ଏବଂ “ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାର ଟସ୍‌ରେ କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ” ଘଟଣାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

1. (i) ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଗଲା । "ଫଳ 8" ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଗଲା । "ଫଳ 7 ରୁ କମ୍'' ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁଗୋଟି ଥରେ ଗଡ଼ାଗଲା । "ଫଳ ≤ 3'' ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(iv) ମିଲି ଓ ଲିମା ଟେନିସ୍ ଖେଳୁଥିଲେ । ଯଦି ଖେଳରେ ମିଲି ଜିଣିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 0.62 ହୁଏ, ତେବେ ଲିମା ହାରିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(v) ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କରାଗଲା । "ଫଳ ଅତିକମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ T'' ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

(vi) ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ସମସ୍ତ ମୌଳିକ ବା ସରଳ ଘଟଣାଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

(vii) $P(E) = 0.05$ ହେଲେ $P(\overline{E})$ କେତେ ସ୍ଥିର କର ।

2. ଗୋଟିଏ ବାକ୍ସରେ ତିନୋଟି ନୀଳ, ଦୁଇଟି ଧଳା ଓ ଚାରୋଟି ଲାଲ ମାର୍ବଲ ରହିଛି । ସେଥିରୁ ଗୋଟିଏ ମାର୍ବଲ ବାକ୍ସରୁ ଯଦୃଚ୍ଛା (randomly) ବଛାଗଲା । ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ଧଳା ମାର୍ବଲ ଆସିବାର,

(ii) ଗୋଟିଏ ନୀଳ ମାର୍ବଲ ଆସିବାର ଓ

(iii) ଗୋଟିଏ ଲାଲ ମାର୍ବଲ ଆସିବାର

3. ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାଗ୍‌ରେ ପାଞ୍ଚଟି ଧଳା, ଚାରୋଟି ଲାଲ୍ ଏବଂ ତିନୋଟି କଳା ଏକ ଆକୃତିବିଶିଷ୍ଟ ବଲ୍ ରହିଛି । ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ କଳା ବଲ୍ ଆସିବାର

(ii) ଗୋଟିଏ ଲାଲ୍ ବଲ୍ ନଆସିବାର

(iii) ଗୋଟିଏ ଧଳାବଲ୍ ନ ଆସିବାର

4. ଗୋଟିଏ ବାକ୍ସରେ 60 ବୈଦ୍ୟୁତିକ ବଲ୍‌ବ ଅଛି । ସେଥିର 12 ଟି ଖରାପ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଭଲ ବଲ୍‌ବ । ସେଥି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ବଲ୍‌ବ ଯଦୃଚ୍ଛା ବାହାର କରାଗଲା । ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ଭଲ ବଲ୍‌ବ ବାହାରିବା

(ii) ଗୋଟିଏ ଖରାପ ବଲ୍‌ବ ବାହାରିବା

4.3 ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଉପରେ ଆଧାରିତ କେତେକ ଧାରଣା :

ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱର ସହାୟତାରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା ପାଇବା ଅପେକ୍ଷାକୃତ ଏକ ଉତ୍କୃଷ୍ଟ ପନ୍ଥା । ଏଥିପାଇଁ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଧାରଣା ଆବଶ୍ୟକ । ପ୍ରଥମେ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ର ଉଦାହରଣ ନେବା । ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରା (ନିରପେକ୍ଷ ମୁଦ୍ରା)କୁ ଟସ୍ କଲେ ଫଳ H କିମ୍ବା T ମିଳିବ । ଏହା ଫଳ ଦ୍ୱୟ କୁ ଉପାଦାନ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍ S ହେଲେ

$S = \{H, T\}$ .... (i)

ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପରୀକ୍ଷଣର ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ (Sample space) କୁହାଯାଏ । ଠିକ୍ ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳ 1, 2, 3, 4, 5, ଓ 6 ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ବି ମିଳିବ ।

ଏହି ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ....(ii)

ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ କଲେ ଅଥବା ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କରାଗଲେ ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ....(iii)

(ଯେଉଁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଫଳ HT ର ଅର୍ଥ ହେଲା ପ୍ରଥମ ଟସ୍‌ର ଫଳ H ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ଟସ୍ ର ଫଳ T ଅଟେ ।)

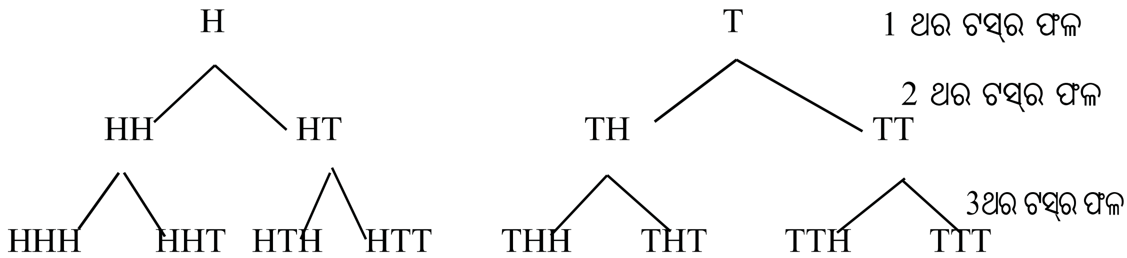
ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଦୁଇ ଥର ଗଡ଼ାଇଲେ ବା ଦୁଇଟି ଲୁଡୁଗୋଟିକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଗଡ଼ାଇଲେ ଆମେ ଯେଉଁ ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍‌ଟି ପାଇବା ତାହା ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\
&(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\
&(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),\\
&(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),\\
&(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),\\
&(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \text{ .... (iv)}
\end{aligned}
$$

(i) ଓ (iii) ରୁ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ ମୁଦ୍ରାକୁ n ଥର ଟସ୍ କଲେ ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଫଳ ସଂଖ୍ୟା = 2^n ଏବଂ

(ii) ଓ (iv)ରୁ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ n ଥର ଗଡ଼ାଇଲେ ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଫଳ ସଂଖ୍ୟା= 6^n ହେବ ।

(ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରଟିରେ ଏକ ଥର, ଦୁଇ ଥର ଓ ଶେଷରେ 3 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ର ଫଳାଫଳ ସ୍ଥିରିକୃତ ହୋଇଛି ।



ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର ର ଫଳକୁ ଦୁଇଭାଗ କରି ଗୋଟିକରେ H ଓ ଅପରଟିରେ T ଲେଖିଲେ ଆମକୁ ସମସ୍ତ ଫଳ ମିଳିବ । ଉପରେ ଥିବା ଚିତ୍ରଟିର ଶେଷ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା 8 ଗୋଟି ଫଳକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍ :

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} ଓ ଏହା 3 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ର ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ ଅଟେ ।)

4.3.1 ଘଟଣା (Event) : ପରୀକ୍ଷଣ ରେ ଲବ୍ଧ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ହେଲେ ଏହାର ଯେ କୌଣସି ଉପସେଟ୍ E ଉକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣ ଜନିତ ଏକ ଘଟଣା ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ମନେକର 2 ଥର ଟସ୍ କରାଗଲା । ତେବେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ଟି

S = {HH, HT, TH, TT}

ମନେକର ଘଟଣା E 'ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ T ଥିବ' କୁ ସୂଚାଏ । ତେବେ ଏଠାରେ S ରେ ଥିବା ଫଳ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ HT, TH, TT ଫଳ ତିନିଗୋଟି E ଘଟଣାର ଅନୁକୂଳ ଅର୍ଥାତ୍ E ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳ ଅଟନ୍ତି ।

ସୁତରାଂ ଘଟଣା E = {HT, TH, TT}

'ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ T ଥିବା' ଘଟଣାକୁ 'E' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -9 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 2 ଥର ଗଡ଼ାଗଲା । ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ଗୁଡ଼ିକ ନିରୂପଣ କର ।

(i) E_1 : ସମଷ୍ଟି ≤ 3 (ii) E_2 : ସମଷ୍ଟି $= 9$ (iii) E_3 : ସମଷ୍ଟି $= 13$

ସମାଧାନ – ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁଗୋଟିକୁ 2 ଥର ଗଡ଼ାଇଲେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ରେ 36 ଗୋଟି ଉପଦାନ

[4.3 ଅନୁଚ୍ଛେଦ (iv)] ଥାଏ ।

(i) ଘଟଣା E_1 : ସମଷ୍ଟି ≤ 3 ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 12, 21 ଓ 11

$\therefore E_1 = \{12, 21, 11\}$

(ii) ଘଟଣା E_2 : ସମଷ୍ଟି 9 ଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହୀତ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 63, 36, 45 ଓ 54

$\therefore E_2 = \{63, 36, 45, 54\}$

(iii) ଘଟଣା E_3 : ସମଷ୍ଟି 13 ଏକ ଅସମ୍ଭବ ଘଟଣା । $\therefore E_3 = \phi$

[**ସୂଚନା :** ଶୂନ୍ୟ ସେଟ ϕ ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ ର ଉପସେଟ ହେତୁ ଏହାକୁ ମଧ୍ୟ ଏକ ଘଟଣା ଭାବେ ନିଆଯିବ]

ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସେଟ୍ ସଂପର୍କିତ ପଦ ସହ ପରିଚିତ ହେବା ବିଧେୟ । ସେଗୁଡ଼ିକର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା । ଏହି ଆଲୋଚନାରେ S ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସକୁ ଓ E ଘଟଣାକୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ $E \subset S$ ଅଟେ ।

(i) ସରଳ ବା ମୌଳିକ ଘଟଣା (Simple or Elementary Event) : ଏକ ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଘଟଣାକୁ ସରଳ ଘଟଣା ବା ମୌଳିକ ଘଟଣା କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଥରେ ମୁଦ୍ରା ଟସ ରେ {H} ଓ {T} ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳ ଘଟଣା । ଦୁଇ ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ {HH}, {HT}, {TH} ଓ {TT} ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳ ଘଟଣା ।

(ii) ଯୌଗିକ ଘଟଣା (Compound Events) : ଏକାଧିକ ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଘଟଣାକୁ ଯୌଗିକ ଘଟଣା କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଦୁଇ ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସରେ {TH, HH, HT} {HH,TT} ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୌଗିକ ଘଟଣା । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି, ଦୁଇଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ S = {TH, TT, HH, HT}

(iii) ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା (Mutually exclusive events) : ଦୁଇଟି ଘଟଣା E_1 ଓ E_2 (ଯେଉଁଠାରେ $E_1, E_2 \subset S$) ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଯଦି E_1 ଓ E_2 ଅଣଛେଦୀ ଅର୍ଥାତ୍ $E_1 \cap E_2 = \phi$ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ {H} ଓ {T} ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ଓ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ ରେ {HH,TH} ଓ {TT} ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ।

(iv) ପରିପୂରକ ଘଟଣା (Complementary events) :

E_1 ଓ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେବେ ଯଦି E_1 ଓ E_2 ପରସ୍ପରର ବହିର୍ଭୂତ ଓ ସେମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗ ($E_1 \cup E_2$) ହେତୁ ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ S ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, E_1 = {H} ଓ E_2 = {T} ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ଥରେ ମୁଦ୍ରାଟସରେ ପରିପୂରକ ଓ E_1 = {HH}, E_2 = {HT, TH, TT} ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ଦୁଇଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ।

4.3.2 ଏକ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ର ସଂଜ୍ଞା :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆମେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛେ ଯେ E ଏକ ଘଟଣା ଓ S ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ ହେଲେ E ଘଟଣାର ସମ୍ଭବ୍ୟତା P(E) ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ।

$$P(E) = \frac{E \text{ ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}}{S \text{ ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}} = \frac{|E|}{|S|}$$

ଅର୍ଥାତ୍ S ରେ ଥିବା ଫଳମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ E ଘଟଣାର ଅନୁକୂଳ ଅଥବା E ଘଟଣାଦ୍ୱାରା ଅନୁଗୃହିତ ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା (|E|) ଏବଂ S ରେ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମସ୍ତ ଫଳ (|S|) ର ଆନୁପାତିକ ସଂଖ୍ୟା ଆମକୁ E ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଦିଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଥରେ ମୁଦ୍ରାଟସ କଲେ S = {H, T} ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ ଅଟେ । ଏଠାରେ |S| = 2 କାରଣ S ରେ ଦୁଇଟି ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି । ଯଦି E_1, E_2, E_3 ଓ E_4 ଘଟଣାଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିବା

E_1 = 'H ଫଳ ମିଳିବ' = {H}, E_2 = 'T ଫଳ ମିଳିବ' = {T}

E_3 = 'H କିମ୍ବା T ଫଳ ମିଳିବ' = {H,T} ଏବଂ E_4 = 'H ଓ T ରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ' = ϕ ହୁଏ

ତେବେ $|E_1| = 1$, $|E_2| = 1$, $|E_3| = 2$ ଓ $|E_4| = 0$ । ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ

$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|S|} = \frac{1}{2},\ P(E_2) = \frac{|E_2|}{|S|} = \frac{1}{2},\ P(E_3) = \frac{|E_3|}{|S|} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ଓ } P(E_4) = \frac{|E_4|}{|S|} = \frac{0}{2} = 0$$

4.3.3 ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର କେତେ ଗୁଡ଼ିଏ ଧର୍ମ :

(i) $E \subset S$ ଘଟଣା ହେଲେ $P(\phi) = 0, P(S)=1$ ଓ $0 \le P(E) \le 1$ । ϕ ଅନିଶ୍ଚିତ ଘଟଣା (Impossible Event) ହୋଇଥିଲା ବେଳେ S ଏକ ନିଶ୍ଚିତ ଘଟଣା (Sure Event) ।

(ii) ଏକ ଘଟଣା (E) ଏବଂ ଏହାର ପରିପୂରକ ଘଟଣା ($\overline{E}$ କିମ୍ବା E') ଦ୍ଵୟ S ର ଉପସେଟ୍ । ଉକ୍ତ ଘଟଣା ଦ୍ଵୟର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଯୋଗଫଳ 1 । ଅର୍ଥାତ୍ $P(E) + P(E') = 1$

(iii) E_1 ଓ E_2 ଦୁଇଗୋଟି ଘଟଣା ଅର୍ଥାତ୍ $E_1 \subset S$ ଓ $E_2 \subset S$ ହେଲେ, $E_1 \cup E_2$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଘଟଣା କାରଣ $E_1 \cup E_2$ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ S ର ଏକ ଉପସେଟ୍ । ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ,

$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$ (ଯେତେବେଳେ E_1 ଓ E_2 ସେଟ୍‌ଦ୍ଵୟ ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ)

(ନବମ ଶ୍ରେଣୀର "ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ" ର ସେଟ୍ ଅଧ୍ୟାୟରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ବିଷୟବସ୍ତୁକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର)

$$\therefore P(E_1 \cup E_2) = \frac{|E_1 \cup E_2|}{|S|} = \frac{|E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|}{|S|} = \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) ଏଠାରେ E_1 ଓ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ଵୟ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଥବା ସାଧାରଣ ଫଳାଫଳ (Sample Points) ରହିଛି ।

(ii) E_1 ଓ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ଵୟ ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା ନୁହଁନ୍ତି (Non-Mutually exclussive)

(iii) ଯଦି E_1 ଓ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ଵୟ ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଅର୍ଥାତ୍ $E_1 \cap E_2 = \phi$ ହୁଏ, ତେବେ $P(E_1 \cap E_2) = 0$ ଓ ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ $\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$

ମନେରଖ : E_1 ଓ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ଵୟ ପାଇଁ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
ଏବଂ E_1 ଓ E_2 ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ହେଲେ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ ।

ଉଦାହରଣ - 10 : ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ କରାଗଲା । ଯଦି E ଘଟଣାଟି "ଗୋଟିଏ H ଗୋଟିଏ T ହୁଏ", ତେବେ E ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 2 ଥର ଟସ୍ କରିବା କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କରିବା ଦ୍ଵାରା ସମାନ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ ମିଳିଥାଏ । ସୁତରାଂ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $\therefore |S| = 4$

ଏହି ଚାରିଗୋଟି ଫଳ ମଧ୍ୟରୁ E ଘଟଣା ର ଅନୁକୂଳ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ TH ଓ HT ।

$\therefore$ E = {TH, HT} ଏବଂ $|E| = 2$

$\therefore$ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ କରାଗଲା । ଯଦି E ଘଟଣାଟି "ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ T" ହୁଏ ତେବେ ଘଟଣାଟିର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ S = {HH, TH, HT, TT} ଓ $|S| = 4$ ।

E ଘଟଣାର ଅନୁକୂଳ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ TH, HT ଓ TT । $\therefore |E| = 3$

$\therefore$ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{4}$ ।

ଉଦାହରଣ - 12 : ଦୁଇଟି ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଗଡ଼ାଗଲା । ଉଭବ ଫଳାଫଳରେ ଥିବା "ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ ≥11" ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏହି ପରୀକ୍ଷଣର ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.3 ର (iv) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ । ଏଠାରେ S ରେ ଥିବା ଫଳ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା $|S| = 6^2 = 36$ । ଏହି 36 ଟି ଫଳ ମଧ୍ୟରୁ E ଘଟଣାର ଅନୁକୂଳ ବା ଅନୁଗୃହିତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 56, 65, 66

$\therefore$ E = {56, 65, 66} ଏବଂ $|E| = 3$

$\therefore$ ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳଟି "ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା" ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ Sample Space S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ମନେକର ଘଟଣା E_1 = ଫଳଟି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଆସିବା ଏବଂ ଘଟଣା E_2 = ଫଳଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅସିବା

ଏଠାରେ E_1 ଓ E_2 ପ୍ରତ୍ୟେକେ S ର ଉପସେଟ୍ । ଏଠାରେ $E_1 = \{2, 4,6\}$ ଏବଂ $E_2 = \{1,3,5\}$

$\therefore |S| = 6,\ |E_1| = 3,\ |E_2| = 3$

ଏଠାରେ ଉଭୟ ଘଟଣା ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ଘଟଣା (Mutually Exclusive Events) ଅଟନ୍ତି।

$\therefore$ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଆସିବା ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା

$$= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)+P(E_2)$$

$$= \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳଟି "ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା" କିମ୍ବା ଫଳ ≥ 4 ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ Sample space S = {1,2,3,4,5,6}

ଫଳଟି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହେବା ଘଟଣା $E_1 = \{2, 4,6\}$ ଏବଂ ଫଳଟି ≥ 4 ହେବା ଘଟଣା $E_2 = \{4, 5,6\}$

$\therefore |E_1| = 3, |E_2| = 3$

E_1 ଏବଂ E_2 ଘଟଣା ଦ୍ୱୟ ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା ନୁହଁନ୍ତି, କାରଣ ଉଭୟ ଘଟଣାରେ କିଛି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି ।

$E_1 \cap E_2 = \{4, 6\} \Rightarrow |E_1 \cap E_2| = 2$

"ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଫଳ ≥ 4" ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$= \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|} = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $E_1 \cup E_2 = \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\} \Rightarrow |E_1 \cup E_2| = 4$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= P(E_1 \cup E_2) = \dfrac{|E_1 \cup E_2|}{|S|} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

ଏବଂ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{2}{3}$ (ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ (ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ ପ୍ରତିପାଦିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) ଘଟଣାଟି ϕ ହେଲେ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଶୂନ ।

(ii) ଘଟଣା $E = S$, ଯେଉଁଠାରେ S (Sample Space) ତେବେ $P(E) < 1$ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ Sample Space ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା 4 ଅଟେ ।

(iv) 'Probability' ଶବ୍ଦରୁ ଗୋଟିଏ ଅକ୍ଷର 'i' ବାଛିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $\frac{2}{11}$ ।

(v) E_1 ଓ E_2 $(E_1, E_2 \subset S)$ ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା ଦ୍ୱୟର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ର ଯୋଗଫଳ 1 ।

(vi) ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଦୁଇ ଥର ଗଡ଼ାଇଲେ ଲବ୍ଧ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା 36 ।

(vii) ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 3 ଥର ଟସ୍ କଲେ ଲବ୍ଧ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ରେ ବିଦ୍ୟମାନ ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା $3^2 = 9$ ।

(viii) 'Mathematics' ଶବ୍ଦରୁ ଯଦୃଚ୍ଛା ଗୋଟିଏ "ଅକ୍ଷର" ବାଛିବାର Sample Space ଟି {m,a,t, h, e, i, c, s} ।

(ix) ଗୋଟିଏ sample space ର E_1 ଏବଂ E_2 ଦ୍ୱୟ ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା ହେଲେ $P(E_2 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ ।

(x) ଥରେ ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ କଲେ $E_1 = \{H\}$ ଘଟଣାଟିର ପରିପୂରକ ଘଟଣା ଟି $E_2 = \{H, T\}$ ।

2. ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ E_1, E_2, E_3 ଏବଂ E_4 ଚାରିଗୋଟି ବହିର୍ଭୂତ ଘଟଣା । ଏଠାରେ $(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$ ନିଶ୍ଚିତ ରୂପେ ଘଟୁଥିବା ଘଟଣା । ଦତ୍ତ ଘଟଣାଗୁଡ଼ିକ ସମ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଥରେ ଗଡ଼ାଇ ଦିଆଗଲା । ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣାମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

(i) ଫଳ ≤ 3 (ii) ଫଳ < 3 (iii) ଫଳ ≤ 4 (iv) ଫଳ < 6 (v) ଫଳ ≤ 6 (vi) ଫଳ > 6

4. 'SCHOOL' ଶବ୍ଦରୁ ଯଦୃଚ୍ଛା ଗୋଟିଏ ଅକ୍ଷର S ବାଛିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ଜାର୍‌ରେ 5 ଗୋଟି ନାଲି, 6 ଗୋଟି ସବୁଜ ଏବଂ 4 ଗୋଟି ନୀଳ ମାର୍ବଲ ରହିଛି । ଜାର୍‌ରୁ ଯଦୃଚ୍ଛା ଗୋଟିଏ ସବୁଜ ମାର୍ବଲ୍ ବାହାର କରିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

6. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଗଲା । ଯଦି E ଘଟଣାଟି "ଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା" କୁ ସୂଚାଏ ତେବେ E ଘଟଣାଟି ଘଟିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

7. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ "ଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା"କୁ ସୂଚାଉ ଥିବା ଘଟଣାଟି ଘଟିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

8. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଗଲା । ଯଦି "ଫଳ ≤ 5" କୁ ସୂଚାଉ ଥିବା ଘଟଣା E ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ଘଟଣାଟି ଘଟିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

9. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 2 ଥର ଟସ୍ କରାଗଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରି ସେମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) ଅତି କମରେ ଗୋଟିଏ H ;

(ii) ଫଳ ରେ କେବଳ T ରହିବା ;

(iii) ଫଳରେ ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ H ରହିବା ଓ

(iv) ଫଳରେ H ନ ରହିବା ।

10. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 3 ଥର ଟସ କରାଗଲା । ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ଟି ଲେଖ ଓ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) ଫଳରେ କେବଳ T ରହିବା,

(ii) ଫଳରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି H ଥିବା,

(iii) ଫଳରେ ଅତି ବେଶିରେ ଦୁଇଟି T ରହିବା,

(iv) ଫଳରେ କେବଳ H କିମ୍ବା କେବଳ T ଥିବା ଓ

(v) କୌଣସି ଫଳରେ T ନ ଥିବା

11. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଦୁଇ ଥର ଗଡ଼ାଇ ଦିଆ ଯିବାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳ ଲବ୍ଧ ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

(i) ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ର ଯୋଗଫଳ = 6,

(ii) ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ର ଯୋଗଫଳ = 4,

(iii) ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା,

(iv) ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ର ଯୋଗଫଳ ≥ 10,

(v) ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ର ଯୋଗଫଳ < 6 ଓ

(vi) ପ୍ରଥମ ସଂଖ୍ୟା ଟି ଅଯୁଗ୍ମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟଟି 6 ।

12. ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ପରସ୍ପର ବହିର୍ଭୂତ ଦୁଇଟି ଘଟଣା E_1 ଓ E_2 ଏପରିକି $P(E_1) = 2P(E_2)$ ଓ $P(E_1) + P(E_2) = 0.9$ । ତେବେ $E_1 \cup E_2$ ଘଟଣା ତଥା E_1 ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

13. ଯଦି E_1 ଓ E_2 ଏପରି ଦୁଇଟି ଘଟଣା ଯେଉଁଠାରେ $P(E_1) = \frac{5}{8}$ ଓ $P(E_2) = \frac{2}{8}$ ଓ $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥିର କର . ।

(i) $P(E_1 \cup E_2)$ (ii) $P(E_1')$ (iii) $P(E_2')$ (iv) $P(E_1' \cup E_2')$

14. 'MATHEMATICS' ଶବ୍ଦରୁ ଯଦୃଚ୍ଛା ଗୋଟିଏ ଅକ୍ଷର A କିମ୍ବା T ବାଛିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ 'ଫଳ 5 କିମ୍ବା ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା' ଆସିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

16. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରୁ "ଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ କିମ୍ବା ଫଳ ≥ 3' ଘଟଣାଟିର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ

TB58QG

ପରିସଂଖ୍ୟାନ

(STATISTICS)

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ପରିସଂଖ୍ୟାନର ଐତିହାସିକ ପୃଷ୍ଠଭୂମି, ସଂଜ୍ଞା, ତଥ୍ୟ, ଯଥା- ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ (Numerical data), ପ୍ରାଥମିକ ତଥ୍ୟ (Primary data) , ପରୋକ୍ଷ ତଥ୍ୟ (Secondary data) ଇତ୍ୟାଦି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅବଗତ ଅଛ । ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟର ଉପସ୍ଥାପନା, ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ (Frequency distribution table) ମାଧ୍ୟମରେ କରିଥିଲ ଏବଂ ତତ୍ ସହିତ ଟାଲି ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ବାରମ୍ବାରତା ନିରୂପଣ କରି ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥିଲ । ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର (Frequency polygon), ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ (Histogram), ବୃତ୍ତଲେଖ (Pie-chart) ଓ ଛବିଲେଖ (Pictograph) ପ୍ରଭୃତି ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ ମାଧ୍ୟମରେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଫଳ ଉପସ୍ଥାପନା କିପରି ହୁଏ ତାହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ଏ ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନାକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଏକାଧିକ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟର ଏକକ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

5.2 କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା (Central Tendency) :

ଆଜିକାର ବିଭିନ୍ନ ପତ୍ରପତ୍ରିକାରୁ ବିଭିନ୍ନ ବିଷୟ ସମ୍ବଳିତ ଆମେ ବହୁତ ତଥ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅବଗତ ଥାଉ, ଯେଉଁ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକରୁ ବିଭିନ୍ନ ବିଷୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ସୂଚନା ମିଳିଥାଏ । ଏକାଧିକ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କଲା ଭଳି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଥାଏ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ । ଦୁଇଜଣ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ପାଞ୍ଚଟି ବିଷୟରେ ଥିବା ପରୀକ୍ଷା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

	ସାହିତ୍ୟ	ଇଂରାଜୀ	ବିଜ୍ଞାନ	ଗଣିତ	ସାମାଜିକ ପାଠ
ଲିଜା	70	60	78	90	87
ପୂଜା	78	68	75	87	86

ସାରଣୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜଣାଯାଏ, ଲିଜା ତିନୋଟି ବିଷୟରେ ପୂଜା ଅପେକ୍ଷା ଭଲ କରିଛି । ପୂଜା ଦୁଇଟି ବିଷୟରେ ଲିଜା ଅପେକ୍ଷା ଭଲ କରିଛି । ଗୋଟିଏ ବିଷୟରେ ଲିଜା ଓ ପୂଜା ଉଭୟଙ୍କର ଫଳାଫଳ ପ୍ରାୟ ପାଖାପାଖି ।

ତେଣୁ ଦୁଇଜଣ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ପରୀକ୍ଷା ଫଳକୁ ତୁଳନା କରି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ସହଜ ନୁହେଁ; କାରଣ ପ୍ରତ୍ୟେକଙ୍କର ପରୀକ୍ଷାଫଳ ପାଞ୍ଚଟି ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶିତ । ଯଦି ଏହି ପାଞ୍ଚଟି ସଂଖ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳାଫଳକୁ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା, ତେବେ ପରୀକ୍ଷାଫଳ ତୁଳନା ସହଜସାଧ୍ୟ ତଥା ସିଦ୍ଧାନ୍ତମୂଳକ ହେବ । ଏକାଧିକ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧିତ ତଥ୍ୟକୁ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ଲାଗି ତଥ୍ୟ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କଲା ଭଳି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ଓ ଏହି ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ ସଂଖ୍ୟାକୁ **ତଥ୍ୟାବଳୀର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା** କୁହାଯାଏ । ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ପରୀକ୍ଷାଫଳ ତୁଳନା କରିବା ଲାଗି ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପାଞ୍ଚଟି ବିଷୟର **ହାରାହାରି (Mean ବା Average)** ନମ୍ବର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥାଉ ।

$$\text{ଲିଜାର ହାରାହରି ନମ୍ବର} = \frac{\text{ମୋଟ ନମ୍ବର}}{\text{ବିଷୟ ସଂଖ୍ୟା}} = \frac{385}{5} = 77.0$$

$$\text{ପୂଜାର ହାରାହାରି ନମ୍ବର} = \frac{\text{ମୋଟ ନମ୍ବର}}{\text{ବିଷୟ ସଂଖ୍ୟା}} = \frac{386}{5} = 77.2$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ପରୀକ୍ଷାଫଳ ପାଞ୍ଚଟି ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବଳିତ ନ ହୋଇ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା । ଫଳରେ ଉଭୟଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କାହାର ପରୀକ୍ଷାଫଳ ଅପେକ୍ଷାକୃତ ଭଲ ଏକଥା ଜାଣିବାରେ ଆଉ ଅସୁବିଧା ରହିଲା ନାହିଁ । ମନେରଖ ହାରାହାରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଏକାଧିକ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କଲାଭଳି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା ନିର୍ଣ୍ଣୟର ଗୋଟିଏ ପ୍ରଣାଳୀ । କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତାକୁ ସୂଚାଇବାପାଇଁ ତିନି ପ୍ରକାରର ମାପ ଅଛି । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା - **(i) ମାଧ୍ୟମାନ (Mean), (ii) ମଧ୍ୟମା (Median) ଏବଂ (iii) ଗରିଷ୍ଠକ (Mode)**

ମାଧ୍ୟମାନ : ଗୋଟିଏ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ହାରାହାରି ମାପକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର **ମାଧ୍ୟମାନ** (Mean) କୁହାଯାଏ ।

ମଧ୍ୟମା : ବଡ଼ରୁ ସାନ ବା ସାନରୁ ବଡ଼ କ୍ରମରେ ସଜାଯାଇଥିବା ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ମଧ୍ୟମ ଲବଧାଙ୍କକୁ **ମଧ୍ୟମା** (Median) କୁହାଯାଏ ।

ଗରିଷ୍ଠକ : କୌଣସି ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟାବଳୀରେ ଥିବା ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କକୁ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର **ଗରିଷ୍ଠକ** (Mode) କୁହାଯାଏ ।

5.2.1 ମାଧ୍ୟମାନ (Mean):

(a) ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Mean of the Individual Series) :

ବାରମ୍ବାରତା ବିହୀନ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ । କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ $x_1, x_2, x_3 ......x_n$ ହେଲେ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ M ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରଦ୍ୱାରା ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 .... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$$

ଏଠାରେ M ମାଧ୍ୟମାନ, Σ (ସିଗ୍‌ମା) : ସମଷ୍ଟିର ସଙ୍କେତ, x ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ

$\sum_{k=1}^{k=n} x_k$: x_1 ଠାରୁ x_n ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଯେଉଁଠାରେ

n : ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା

ସଂକ୍ଷେପରେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ = $\dfrac{\text{ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି}}{\text{ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା}}$

ଅର୍ଥାତ୍ $M = \dfrac{\Sigma x}{n}$

ଉଦାହରଣ - 1 : ଜଣେ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ଛଅଟି ବିଷୟରେ ଶତକଡ଼ା ନମ୍ବର ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା 65, 67, 85, 78, 69, 78 । ଏହି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $M = \dfrac{\Sigma x}{n}$

(ଯେଉଁଠାରେ Σx = ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ n = ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା)

$$= \frac{1}{6}(65 + 67 + 85 + 78 + 69 + 78)$$

$$= \frac{1}{6} \times 442 = 73.66 .... = 73.67$$

(b) ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ

(Mean of a frequency distribution) :

ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -2: ବାରଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାରଣୀ - A

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି. ରେ) x :	69	70	71	72	73
ବାରମ୍ବାରତା f :	4	2	3	2	1

ସମାଧାନ :-

ସାରଣୀ - A_1

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ)(x)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ବାରମ୍ବାରତା × ଉଚ୍ଚତା (fx)
69	4	276
70	2	140
71	3	213
72	2	144
73	1	73
	$\Sigma f = 12$	$\Sigma fx = 846$

ମାଧ୍ୟମାନ $M = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \dfrac{846}{12} = 70.5$ ସେ.ମି. (ଉତ୍ତର)

ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ (Short-cut Method) ବା ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ (Deviation Method) :

ପୂର୍ବ ଦର୍ଶିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ କେତେ ଗୁଡ଼ିଏ ବଡ଼ ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନ ତଥା ଯୋଗର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ଏହି ଅସୁବିଧା ଦୂର କରିବା ଲାଗି ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଏ ଓ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ **ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ** ବା **ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ** ନାମରେ ଅଭିହିତ । ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ମୌଳିକ ଧାରଣା ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉଦାହରଣରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି, ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

93, 98, 112, 103, 97, 109 ର ମାଧ୍ୟମାନ = $\frac{1}{6}$ (93 + 98 + 112 + 103 + 97 + 109)

$= \frac{1}{6}\ \{(100 - 7) + (100 - 2) + (100 + 12) + (100 + 3) + (100 - 3) + (100 + 9)$

$= \frac{1}{6}\ [6 \times 100 + \{(-7) + (-2) + 12 + 3 + (-3) + 9\}]$

$= \frac{1}{6} \times 6 \times 100 + \frac{1}{6} \times 12 = 100 + \frac{12}{6}$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ 100 ଠାରୁ କେତେ ବେଶି ବା କେତେ କମ୍ ଏହି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କରୁ 100 ବିୟୋଗ କଲେ ଯେଉଁ ବିୟୋଗଫଳ ମିଳେ, ତାକୁ ସଂପୃକ୍ତ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କର **ବିଚ୍ୟୁତି (Deviation)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହି ସ୍ଥଳେ 100 କୁ **ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ (Working zero)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଉପରିସ୍ଥ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ମାନଙ୍କର ବିଚ୍ୟୁତି (x) ଯଥାକ୍ରମେ -7, -2, 12, 3, -3, 9 ।

ଏହି ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି = (-7) + (-2) + 12 + 3 + (-3) + 9 = 12

∴ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, ଦତ୍ତ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ (M) = $100 + \frac{12}{6}$

ଅର୍ଥାତ୍ M = ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ $+ \dfrac{\text{ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି}}{\text{ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା}}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :- 100 ପରିବର୍ତ୍ତେ ଯେ କୌଣସି ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଉତ୍ତରରେ କୌଣସି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେବ ନାହିଁ । ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ଓ ବିଚ୍ୟୁତି ସାହାଯ୍ୟରେ ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀକୁ **ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ** କୁହାଯାଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ଉପଯୁକ୍ତ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ସାରଣୀ A ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : **ସାରଣୀ A_2**

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.) (x)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ବିଚ୍ୟୁତି (y) ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ : 70	ବାରମ୍ବାରତା × ବିଚ୍ୟୁତି (fy)
69	4	-1	-4
70	2	0	0
71	3	1	3
72	2	2	4
73	1	3	3
	$\Sigma f = 12$		$\Sigma fy = 6$

ମାଧ୍ୟମାନ M = ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ $+ \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} = 70 + \frac{6}{12} = 70 + 0.5 = 70.5$ (ଉତ୍ତର)

(C) ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ଏବଂ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Mean of a Grouped frequency distribution) :

ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (y) ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ଏବଂ ତତ୍ପରେ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଅନୁରୂପ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା (f) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଗୁଣଫଳ (fy) ସ୍ଥିର କରାଯାଇଥାଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ ବାରମ୍ବାରତାର ଗୁଣଫଳ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି (Σfy) ଏବଂ ବାରମ୍ବାରତା ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି (Σf) ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ମାଧ୍ୟମାନ (M) = $\frac{\Sigma fy}{\Sigma f}$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସ୍ଥିର କରାଯାଇଥାଏ ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 4 : ଜଣେ ବ୍ୟବସାୟୀର 100 ଦିନର ଉପାର୍ଜ୍ଜନକୁ ଏକ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ସାରଣୀରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ବ୍ୟବସାୟୀର ଦୈନିକ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପାର୍ଜ୍ଜନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦୈନିକ ଉପାର୍ଜ୍ଜନ (ଟଙ୍କା ହିସାବରେ) ଲାଗି x ଓ ବାରମ୍ବାରତା ଲାଗି f ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଛି ।)

ସାରଣୀ - B

(x) :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
(f) :	1	7	24	36	25	6	1

ସୂଚନା : ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ଦତ୍ତଥିବା ସ୍ଥଳେ ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ଦତ୍ତ ଅଛି । ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ y = $\frac{l_1 + l_2}{2}$, (ଯେଉଁଠି l_1 ଓ l_2 ଯଥାକ୍ରମେ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନ ଓ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା) କୁ ସେହି ସଂଭାଗର ପ୍ରତିନିଧିତ୍ୱ କରୁଥିବା ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ବୋଲି ଧରିନେଇ fy ଓ Σfy ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ଲବଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ମିଳିବ ।

ସମାଧାନ :- **ସାରଣୀ - B_1**

ଲବଧାଙ୍କ (ସଂଭାଗ)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ସଂଭାଗ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ($y = \frac{l_1 + l_2}{2}$)	ବାରମ୍ବାରତା x ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (fy)
0 - 10	1	5	5
10 - 20	7	15	105
20 - 30	24	25	600
30 - 40	36	35	1260
40 - 50	25	45	1125
50 - 60	6	55	330
60 - 70	1	65	65
	Σ f = 100		Σ fy = 3490

ମାଧ୍ୟମାନ M = $\frac{\sum fy}{\sum fy} = \frac{3490}{100} = 34.9$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : ସାରଣୀ - B ରେ ଥିବା ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ, ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ବା ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ 35 କୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ (A) ରୂପେ ନିଆଯାଉ ।

ସାରଣୀ - B_2

ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା(f)	ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (x)	ବିଚ୍ୟୁତି (y) = x - A	ବାରମ୍ବାରତା × ବିଚ୍ୟୁତି (fy)
0 - 10	1	5	-30	-30
10 - 20	7	15	-20	-140
20 - 30	24	25	-10	-240
30 - 40	36	35	0	0
40 - 50	25	45	10	250
50 - 60	6	55	20	120
60 - 70	1	65	30	30
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma fy = -10$

$\therefore$ ମାଧ୍ୟମାନ (M) $= A + \dfrac{\Sigma fy}{\Sigma f} = 35 + \dfrac{-10}{100} = 35 - 0.1 = 34.9$

ସୋପାନ - ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ (Step - deviation method) :

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଏକ ଅତି ସରଳୀକୃତ ଏବଂ ଅତି ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ହିସାବ ସଂପୃକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ । ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଭଳି ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ମଧ୍ୟ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ସଂପୃକ୍ତ ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ସଂପୃକ୍ତ ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କର ଥିବା ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ଦ୍ୱାରା ବିଚ୍ୟୁତିକୁ ଭାଗ କରି ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରରେ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଥାଏ ।

ଏଠାରେ ସୂତ୍ରଟି ହେଲା : ମାଧ୍ୟମାନ (M) $= A + \dfrac{\Sigma fy'}{\Sigma f} \times c$

(A) = ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ, $y' = \dfrac{\text{ବିଚ୍ୟୁତି (y)}}{\text{ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ (c)}}$

$\Sigma fy'$ = ବାରମ୍ବାରତା (f) ଓ y' ର ଗୁଣଫଳମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି

f = ବାରମ୍ବାରତା, Σf = ବାରମ୍ବାରତା ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣୀ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସୋପାନ - ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀରେ ସ୍ଥିର କର ।

ସାରଣୀ - C

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x)	5	10	15	20	25
ବାରମ୍ବାରତା (f)	3	4	5	2	1

ସମାଧାନ :

ସାରଣୀ - C_1

x	f	x - A = y (A = 15)	c = 5 $y' = \frac{y}{5}$	fy'
5	3	-10	-2	-6
10	4	-5	-1	-4
15	5	0	0	0
20	2	5	1	2
25	1	10	2	2
	$\Sigma f = 15$			$\Sigma fy' = -6$

$$M = A + \frac{\Sigma fy'}{\Sigma f} \times c = 15 + \frac{-6}{15} \times 5 = 15 + (-2) = 13$$

ଏହି ଉଦାହରଣରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ବିଚ୍ୟୁତି (x - A) ରେ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ 5 । ବିଚ୍ୟୁତି 5 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ହିସାବକୁ ସରଳ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ - 7 : ସାରଣୀ B ରେ ଥିବା ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ଓ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସୋପାନ - ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାରଣୀ - B_3

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ 35 କୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ (A) ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି ।

ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (x)	ବିଚ୍ୟୁତି : y = x - A (A = 35)	$\frac{\text{ବିଚ୍ୟୁତି } (y')}{\text{ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର}}$	fy'
0 - 10	1	5	-30	-3	-3
10 - 20	7	15	-20	-2	-14
20 - 30	24	25	-10	-1	-24
30 - 40	36	35	0	0	0
40 - 50	25	45	10	1	25
50 - 60	6	55	20	2	12
60 - 70	1	65	30	3	3
	$\Sigma f = 100$				$\Sigma fy' = -1$

$\therefore$ ମାଧ୍ୟମାନ (M) $= A + \frac{\Sigma fy'}{\Sigma f} \times i = 35 + \frac{-1}{100} \times 10 = 35 - 0.1 = 34.9$

(i = ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କରେ ଥିବା ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ । ଏଠାରେ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟ 10 ଯାହା ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର ସହ ସମାନ ।)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସ୍ତମ୍ଭର ପ୍ରାୟ ମଝିରେ ଥିବା ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି । ଏହା ଦ୍ୱାରା ହିସାବର ଜଟିଳତା କମିଯାଏ । ଅବଶ୍ୟ 35 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ (ବା ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାକୁ) ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଉପରୋକ୍ତ ସମାଧାନ ମଧ୍ୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

25 କୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି, ହିସାବରେ କ'ଣ ପାର୍ଥକ୍ୟ ହେଉଛି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ବି.ଦ୍ର. : $x_1, x_2, x_3 .....x_n$ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ M ହେଲେ, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - M) = 0$

ଏହା ବିଚ୍ୟୁତି ସଂପର୍କିତ ଏକ ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟ । ଉତ୍ତର ପାଇଁ ଉଦାହରଣ - 8 ର ସମାଧାନକୁ ଦେଖ ।

ମାଧ୍ୟମାନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟ (Some Useful Results on Mean) :

$x_1, x_2, x_3 .....x_n$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ M ହେଲେ,

(i) $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, ... , x_n + a$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ $M + a$ ହେବ ।

(ii) $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a ....x_n - a$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ $M - a$ ହେବ ।

(iii) $ax, ax_2, ax_3 .... ax_n$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ aM ହେବ ଯେତେବେଳେ $a \neq 0$ ।

(iv) $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \frac{x_3}{a} .... \frac{x_n}{a}$ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ $\frac{M}{a}$ ହେବ, ଯେତେବେଳେ $a \neq 0$ ।

ଉଦାହରଣ - 8 : $x_1, x_2, x_3 ....x_n$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ M ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - M) = 0$

ସମାଧାନ : $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 .... + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 ......+ x_n = n . M$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - M) = (x_1 - M) + (x_2 - M) + (x_3 - M) .... + (x_n - M)$

$= (x_1 + x_2 + x_3 ...... + x_n) - (M + M + M .....$ n ଥର)

$= (x_1 + x_2 + x_3 ...... + x_n) - n.M$

$= n . M - n . M = 0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 9 : $x_1, x_2, x_3 ......$ ପ୍ରଭୃତି n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ M ।

ଯଦି $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 12) = -10$ ଏବଂ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 3) = 62$ ହୁଏ ତେବେ .n ଓ M ର ମାନ ସ୍ଥିର ।

ସମାଧାନ : $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 12) = -10 \Rightarrow (x_1 - 12) + (x_2 - 12) + ... + (x_n - 12) = -10$

$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 ...... + x_n) - 12n = -10$

$\Rightarrow nM - 12n = -10 ....(i)$ $[\because \frac{x_1 + x_2 + x_3 .... + x_n}{n} = M]$

ସେହିପରି $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 3) = 62 \Rightarrow nM - 3n = 62 ....(ii)$

(i) ରୁ (ii) ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା $-9n = -72 \Rightarrow n = 8$

'n' ର ମାନ (i) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $8M - 12 \times 8 = -10$

$\Rightarrow 8M = 12 \times 8 - 10 = 86 \Rightarrow M = \frac{86}{8} = 10.75$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

x_1, x_2, x_3 .... ପ୍ରଭୃତି n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ M ।

ଯଦି $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2) = 110$ ଏବଂ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5) = 80$ ହୁଏ, ତେବେ n ଓ m ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2) = 110$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - 2) = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) .... + (x_n - 2) = 110$

$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_n) - 2n = 110$

$\Rightarrow nM - 2n = 110$ ....(i) $\qquad [\because \frac{x_1 + x_2 + x_3...........+x_n}{n} = M]$

ପୁନଶ୍ଚ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5) = 80 \Rightarrow nM - 5n = 80$ ....(ii)

(i) ରୁ (ii) ବିୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା $3n = 30 \Rightarrow n = \frac{30}{3} = 10$

'n' ର ମାନ (i) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $10M - 2 \times 10 = 110$

$\Rightarrow 10M = 110 + 20 = 130 \Rightarrow M = \frac{130}{10} = 13$

$\therefore n = 10$ ଓ $M = 13$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (a)

କ - ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଟି ଠିକ୍ ତା' ପାଖରେ T ଓ ଯେଉଁଟି ଭୁଲ୍ ତା' ପାଖରେ F ଲେଖ ।

(i) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ ସେ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(ii) ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥିବା ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ପଦର ମାଧ୍ୟମାନ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟମପଦ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ତଥ୍ୟାବଳୀର ହାରାହାରି ନିର୍ଣ୍ଣୟକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ କୁହାଯାଏ ।

(iv) ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଉତ୍ତର ମିଳିବ ।

(v) କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ 20 ହେଲେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ 15 ର ବିଚ୍ୟୁତି 5 ।

(vi) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ $\frac{n+1}{2}$ ।

(vii) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ 2n+2 ।

(viii) ପ୍ରଥମ ଦଶଗୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ 10 ।

(ix) 15 ଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ 17 । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାକୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ସେମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ ସ୍ଥିର କଲେ ମାଧ୍ୟମାନ 8.5 ହେବ ।

(x) ପ୍ରଥମ 20ଟି ଯୁଗ୍ମ ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ, ପ୍ରଥମ 20 ଟି ଗଣନସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନର ଦୁଇଗୁଣ ।

2. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ ।

(i) 61, 62, 68, 56, 64, 72, 69, 51, 71, 67, 70, 55, 63 ଏହି ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ ନିରୂପଣ ଲାଗି ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଉପଯୁକ୍ତ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ?

(A) 55 (B) 60 (C) 70 (D) 72

(ii) ପ୍ରଥମ 20 ଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) 10 (B) 10½ (C) $\frac{21}{20}$ (D) 210

(iii) ପ୍ରଥମ 'n' ସଂଖ୍ୟକ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Whole number) ର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) $\frac{n-1}{2}$ (B) $\frac{n}{2}$ (C) $\frac{n+1}{2}$ (D) n

(iv) ପ୍ରଥମ 'n' ସଂଖ୍ୟକ ଧନାତ୍ମକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) (n - 1) (B) n (C) n + 1 (D) n + 2

(v) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଧନାତ୍ମକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) (n - 11) (B) n (C) n + 1 (D) n + 2

(vi) 'M' ମାଧ୍ୟମାନ ବିଶିଷ୍ଟ 10 ଟି ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ 2 ବଢ଼ାଇଲେ ନୂତନ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ 10 ଟିର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) m (B) 2m (C) m^2 (D) m + 2

(vii) 'M' ମାଧ୍ୟମାନ ବିଶିଷ୍ଟ n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ 4 ଗୁଣ କରିଦେଲେ ନୂତନ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) $\frac{M}{4}$ (B) M (C) 4M (D) $\frac{4}{M}$

(viii) 'M' ମାଧ୍ୟମାନ ବିଶିଷ୍ଟ n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ x ବିୟୋଗ କଲେ ନୂତନ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) M (B) (M + x) (C) Mx (D) (M - x)

(ix) 'M' ମାଧ୍ୟମାନ ବିଶିଷ୍ଟ n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ନୂତନ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) M (B) $\frac{M}{5}$ (C) 5M (D) M - 5

(x) ଯଦି a ସଂଖ୍ୟକ ବାଳକମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ ବୟସ 12 ବର୍ଷ ଓ b ସଂଖ୍ୟକ ବାଳିକାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ ବୟସ 10 ବର୍ଷ ହୁଏ, ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ବାଳକ ବାଳିକାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ ବୟସ କେତେ ବର୍ଷ ହେବ ?

(A) $\frac{10a+12b}{a+b}$ (B) $\frac{12a+10b}{a+b}$ (C) $\frac{10a+12b}{10+12}$ (D) $\frac{12a+10b}{10+12}$

(xi) 998.9, 999.1, 1000.3, 1000.6, 1000.1 ର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) 998 (B) 999 (C) 1000 (D) 1001

(xii) 6, 8, 5, 7, x ଏବଂ 4 ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ 7 ହେଲେ x ର ମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

(xiii) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ M ହେଲେ $\sum_{i=1}^{6}(x_i - M)$ ର ମାନ କେତେ ହେବ ?

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) -6

(xiv) x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8 ର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) x + 2 (B) x + 4 (C) x + 6 (D) x

(xv) 18 ର ସମସ୍ତ ଗୁଣନୀୟକ ମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ କେତେ ?

(A) 5 (B) 6 (C) 6.5 (D) 7

ଖ – ବିଭାଗ

3. ଦଶଥର ଖେଳି ଜଣେ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳାଳୀ ସଂଗ୍ରହ କରିଥିବା ରନ୍ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା – 47, 41, 50, 39, 45, 48, 42, 32, 60 ଏବଂ 20 । ତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସଂଗୃହୀତ ରନ୍‌ର ମାଧ୍ୟମାନ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ (ଉପଯୁକ୍ତ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. କିଲୋଗ୍ରାମ ଓଜନରେ 30 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଓଜନ ହେଲା 21, 30, 40, 25, 26, 22, 26, 31, 22, 36, 30, 25, 25, 33, 30, 25, 27, 27, 25,31, 33, 22, 21, 36, 40, 31, 33, 30, 37, 36 । ଏହି ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନରେ ସଜ୍ଜିତ କରି ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. କିଛି ରାସାୟନିକ ପଦାର୍ଥର ଓଜନ 30 ଥର ନିଆଯାଇ ଫଳାଫଳକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ସଜାଯାଇଛି । ମାଧ୍ୟମାନ ଓଜନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଓଜନ (ଗ୍ରାମ୍‌ରେ) :	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
ବାରମ୍ବାରତା :	1	1	6	6	7	5	2	1	1

6. ଏକ ଶ୍ରେଣୀରେ 30 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ହାରାହାରି ବୟସ 12 ବର୍ଷ । ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ସହିତ ସେମାନଙ୍କର ହାରାହାରି ବୟସ 13 ବର୍ଷ ହେଲେ, ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ବୟସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. x_1, x_2, x_3 ...... ପ୍ରଭୃତି n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ m । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କରେ $(a + b)$ ଯୋଗ କରାଯାଏ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନୂତନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ $(m - a + b)$ ହେବ ।

ଗ - ବିଭାଗ

8. ଏକ ବଗିଚାରେ ଥିବା ଗଛ ମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଗଛଗୁଡ଼ିକର ମାଧ୍ୟମାନ ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.)ରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.)ରେ :	70 - 65	65 - 60	60 - 55	55 - 50	50 - 45	45 - 40	40 - 35	35 - 30	30 - 25
ବାରମ୍ବାରତା :	4	7	8	10	5	6	3	7	2

9. ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ, ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସଂଭାଗ :	84 - 90	90 - 96	96 - 102	102 - 108	108 - 114	114 - 120
ବାରମ୍ବାରତା :	8	10	16	23	12	11

10. ନିମ୍ନ ଭାଗ - ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସୋପାନ - ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀରେ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗ :	0 - 4	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24
ବାରମ୍ବାରତା :	5	7	10	15	9	4

11. ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଅର୍ନ୍ତଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ଉଭୟ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଓ ସୋପାନ - ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗ :	0 - 50	50 - 100	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300
ବାରମ୍ବାରତା:	4	10	12	10	8	8

12. ସୋପାନ ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ, ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗ :	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ବାରମ୍ବାରତା:	10	6	8	12	5	9

13.(i) ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ 7.5 ହେଲେ ' f ' ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ :	5	6	7	8	9	10	11	12
ବାରମ୍ବାରତା :	20	17	f	10	8	6	7	6

(ii) ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ 6 ହେଲେ ' p ' ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ :	3	6	7	4	P+3	8
ବାରମ୍ବାରତା :	5	2	3	2	4	6

14. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ 50 ଏବଂ ବାରମ୍ବାରତା ଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି 120 ହେଲେ f_1 ଓ f_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସଂଭାଗ :	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100
ବାରମ୍ବାରତା :	17	f_1	32	f_2	190

15. ସୋପାନ-ବିଚ୍ୟୁତି ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗ :	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79
ବାରମ୍ବାରତା :	5	65	222	112	53	40	3

ସୂଚନା : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ (inclusive) ଅଟେ । ଏଠାରେ ଉକ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣକୁ ବର୍ହିଭୁକ୍ତ (exclusive) ସଂଭାଗୀକରଣରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ମାଧ୍ୟମାନ ନିରୂପଣ କରାଯାଇପାରେ । କାରଣ ଏଠାରେ ସଂଭାଗଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତାରରରେ କୌଣସି ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିବାର ସମ୍ଭାବନା ନ ଥାଏ।

16. x_1, x_2, x_3 ...... ପ୍ରଭୃତି n ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନ M । ଯଦି $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 5) = 60$ ଏବଂ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 8) = 24$ ହୁଏ ତେବେ 'n' ଓ M ସ୍ଥିର କର ।

5.2.2 ମଧ୍ୟମା (Median) :

କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ ସାନରୁ ବଡ଼ ବା ବଡ଼ରୁ ସାନ କ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ଥିଲେ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା କୁହାଯାଏ ।

ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ : ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା n ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ଥାଏ ଓ ତାହା ହେଉଛି $\frac{n+1}{2}$ ତମ ସ୍ଥାନ । ଏଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\frac{n+1}{2}$ ତମ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ହିଁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ । ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗ୍ମ ହେଲେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ଥାଏ ଓ ସେ ଦୁଇଟି ହେଲା $\frac{n}{2}$ ତମ ଓ $(\frac{n}{2}+1)$ତମ ସ୍ଥାନ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ଥିବାରୁ ସେହି ଦୁଇ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ନେଇ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ବା ଅଧଃ କ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା n ହେଉ ।

n ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ, ମଧ୍ୟମା $(M_d) = \frac{n+1}{2}$ ତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ,

n ଯୁଗ୍ମ ହେଲେ, ମଧ୍ୟମା $(M_d) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{n}{2}\text{ ତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ} + (\frac{n}{2}+1)\text{ ତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ}\right\}$

(a) ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଉଦାହରଣ - 11 :

(i) ମନେକର 7 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଓଜନ (କି.ଗ୍ରା. ରେ) 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49 ।

(ଏଠାରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଅଯୁଗ୍ମ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ।)

(ଓଜନର) ମଧ୍ୟମା = $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ ତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଅର୍ଥାତ୍ ଚତୁର୍ଥ ଲବ୍ଧାଙ୍କ $\therefore M_d = 45$

(ii) ମନେକର 6 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଗଣିତ ପରୀକ୍ଷାର ନମ୍ବର 87, 95, 63, 53, 69, ଓ 72 ।

ଏଠାରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ବା ଅଧଃ କ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ନ ଥିବାରୁ ପ୍ରଥମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ କ୍ରମରେ ସଜାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ନମ୍ବର ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା :- 53, 63, 69, 72, 87, 95 ଫଳରେ ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\frac{n}{2}$ ତମ ଓ $(\frac{n}{2}+1)$ ତମ, ଅର୍ଥାତ୍ ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା $M_d = \frac{(\text{ତୃତୀୟ ଲବଧାଙ୍କ} + \text{ଚତୁର୍ଥ ଲବଧାଙ୍କ})}{2} = \frac{69+72}{2} = \frac{141}{2} = 70.5$

(b) ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ :-

ଉଦାହରଣ - 12

ସାରଣୀ - D

ଓଜନ (କି.ଗ୍ରା. ରେ):	46	48	50	52	53	54	55
ବାରମ୍ବାରତା :	7	5	8	12	10	2	1

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :- ଏଭଳି ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ (ବା ଅଧଃ) କ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ହୋଇରହିଥାନ୍ତି । ତଥ୍ୟାବଳୀର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିଲେ ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇ ପାରିବ ।

ସାରଣୀ - D_1

ଓଜନ (x) (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (c.f.)	ଲବ୍ଧାଙ୍କର ସ୍ଥାନ
46	7	7	1 ରୁ 7 ତମସ୍ଥାନ
48	5	12	8 ରୁ 12 ତମସ୍ଥାନ
50	8	20	13 ରୁ 20 ତମସ୍ଥାନ
52	12	32	21 ରୁ 32 ତମସ୍ଥାନ
53	10	42	33 ରୁ 42 ତମସ୍ଥାନ
54	2	44	43 ରୁ 44 ତମସ୍ଥାନ
55	1	45	45 ତମସ୍ଥାନ
	$\Sigma f = 45$		

ମୋଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା n ଅଯୁଗ୍ମ ହୋଇଥିବାରୁ ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ସ୍ଥାନ (m) = $\frac{n+1}{2} = \frac{45+1}{2} = 23$

$\therefore$ ମଧ୍ୟମା = 23 ତମ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେଉଁ ସ୍ଥାନରୁ କେଉଁ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ରହିଛି ତାହାର ସୂଚନା ଦିଆଯାଇଛି ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :- 21 ତମ ସ୍ଥାନ (50 ର c.f. 20 ର ପରବର୍ତ୍ତୀ) ରୁ 32 ତମ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 52 ।

ଏଣୁ 32 ତମ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମଧ୍ୟ 52 ।

$\therefore$ ମଧ୍ୟମା = 52 କି.ଗ୍ରା. । (ଉତ୍ତର)

ସୂତ୍ର :- ଯେଉଁ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ (m) ଅପେକ୍ଷା ଠିକ୍ ବୃହତ୍ତର ସେହି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ହିଁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ।

ଉଦାହରଣ - 13 : 60 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଓଜନ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଛି । ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାରଣୀ - E

ଓଜନ (କି.ଗ୍ରା.) x :	37	38	39	40	41
ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା (f) :	10	14	18	12	6

ସମାଧାନ :-

ସୂଚନା :- ଏଠାରେ ମୋଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା n(= 60) ଯୁଗ୍ମ ହୋଇଥିବାରୁ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ଅଛି ଓ ସେ ଦୁଇଟି ହେଲା $\frac{60}{2}$ ତମ ଓ $\frac{60}{2}+1$ ତମ ସ୍ଥାନ ଅର୍ଥାତ୍ 30 ତମ ଓ 31 ତମ ସ୍ଥାନ ।

.: ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ହେଉଛି $\left(\frac{30+31}{2}\right)$ ତମ ସ୍ଥାନ । ଅର୍ଥାତ୍ 30.5 ତମ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ହେଉଛି ମଧ୍ୟମା । ଏହାର ଅର୍ଥହେଲା 30 ତମ ଓ 31 ତମ ସ୍ଥାନୀୟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ହେଉଛି ମଧ୍ୟମା ।

ସାରଣୀ - E_1

ଓଜନ (କି.ଗ୍ରା.) (x)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (cf)
37	10	10
38	14	24
39	18	42
40	12	54
41	6	60
	$\Sigma f = 60$	

ମଧ୍ୟମା ଲବ୍ଧାଙ୍କର ସ୍ଥାନ (m) = $\frac{n+1}{2} = \frac{60+1}{2} = 30.5$

30.5 ଠାରୁ ଠିକ୍ ବୃହତ୍ତର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାତା ହେଲା 42 ।

.: ମଧ୍ୟମା = 39 କି.ଗ୍ରା. (ଉତ୍ତର)

(c) ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ଏବଂ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀ ସର୍ବଦା ଅଧଃ ବା ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ହୋଇ ରହିଥାଏ । ତେଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ହିଁ ମଧ୍ୟମା ମିଳିଥାଏ ।

n ଯୁଗ୍ମ ହେଉ ବା ଅଯୁଗ୍ମ ହେଉ $\frac{n}{2}$ ତମ ସ୍ଥାନକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ ନିଆଯାଇପାରେ (ଅବଶ୍ୟ ଯେଉଁଠି 'n' ର ମାନ ଅପେକ୍ଷାକୃତ ବୃହତ୍) ।

ଭାଗବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନଟି ଯେଉଁ ସଂଭାଗ ଅନ୍ତର୍ଗତ ହୋଇଥାଏ, ସେହି ସଂଭାଗକୁ ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗ କୁହାଯାଏ । ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଲାଗି ପ୍ରଥମେ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା - ସଂଭାଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଜାଣିଛେ ଯେ, **ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (cf) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସାରିବା ପରେ ଯେଉଁ ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ (m) ଅପେକ୍ଷା ଠିକ୍ ବୃହତ୍ତର ହେବ ସେହି ସଂଭାଗ ହିଁ ମଧ୍ୟମା-ସଂଭାଗ ହେବ ।**

ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସୂତ୍ର : ମଧ୍ୟମା $(M_d) = l + \frac{m-c}{f} \times i$

m = ମଧ୍ୟମା ସ୍ଥାନ , l = ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା, f = ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା, c = ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗର ଠିକ୍ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଏବଂ i = ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର

ଉଦାହରଣ 14 ଏକ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ଭୌତିକ ବିଜ୍ଞାନ (Physical Science) ପରୀକ୍ଷାର ନମ୍ବର ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଶ୍ରେଣୀର ମଧ୍ୟମା ନମ୍ବର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାରଣୀ F

ନମ୍ବର (x) :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ବାରମ୍ବାରତା :	5	7	10	8	5

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଦତ୍ତ ସାରଣୀ ଏକ ବହିର୍ଭୂତ (Exclusive) ସଂଭାଗୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ସାରଣୀ : F_1

ନମ୍ବର (x)	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	7	12
20 - 30	10	22
30 - 40	8	30
40 - 50	5	35

n = 35

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ (m) = $\frac{n}{2} = \frac{35}{2}$ = 17.5 ତମ ସ୍ଥାନ

m ଠାରୁ ଠିକ୍ ବୃହତ୍ତର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା = 22 $\therefore$ ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗ ହେଲା : (20 - 30)

ଫଳରେ $l = 20$, $f = 10$, $c = 12$ ଏବଂ $i = 10$

ମଧ୍ୟମା $(M_d) = l + \frac{m-c}{f} \times i \Rightarrow$ ମଧ୍ୟମା $(M_d) = 20 + \frac{17.5-12}{10} \times 10 = 20 + 5.5 = 25.5$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 15 : ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ସ୍ଥିର କର ।

ସାରଣୀ G

ସଂଭାଗ :	4 - 7	8 - 11	12 - 15	16 - 19	20 - 23	24 - 27	28 - 31	32 - 35
ବାରମ୍ବାରତା:	4	11	25	47	56	29	20	08

ସମାଧାନ : ସୂଚନା : ଆମକୁ ପ୍ରଥମେ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ (Inclusive) ସଂଭାଗୀକରଣକୁ ବହିର୍ଭୂତ (Exclusive) ସଂଭାଗୀକରଣରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ଉଚିତ । ବହିର୍ଭୂତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା କିମ୍ବା ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାରର ପରିବର୍ତ୍ତନ ନ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟରେ 0.5 ଅନ୍ତର ରହିବ ।

ବି.ଦ୍ର.: ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ପ୍ରକାଶିତ ସଂଭାଗଗୁଡ଼ିକୁ ବହିର୍ଭୂତ କରିବାକୁ ହେଲେ ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚ ସୀମା ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର ସ୍ଥିର କରି ତାର ଅର୍ଦ୍ଧେକକୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନ ସୀମାରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଏ ଏବଂ ଉଚ୍ଚ ସୀମାରେ ଯୋଗ କରି ସଂଭାଗୀକରଣକୁ ବହିର୍ଭୂତ ସଂଭାଗୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ କରାଯାଇଥାଏ ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚ ସୀମା – ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା = 1

$\therefore \frac{1}{2}$ ଅର୍ଥାତ୍ 0.5 କୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମାରୁ ବିୟୋଗ କରାଯିବ ଏବଂ 0.5 କୁ ଉକ୍ତ ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚ ସୀମାରେ ଯୋଗ କରାଯିବ । ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଦେଖ ।

ସାରଣୀ - G_1

ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (cf)
3.5 - 7.5	4	4
7.5 - 11.5	11	15
11.5 - 15.5	25	40
15.5 - 19.5	47	87
19.5 - 23.5	56	143
23.5 - 27.5	29	172
27.5 - 31.5	20	192
31.5 - 35.5	08	200

n = 200

ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ (m) = $\frac{n}{2} = \frac{200}{2} = 100$

m ଠାରୁ ଠିକ୍ ବୃହତ୍ତର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା = 143 $\therefore$ ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗ = (19.5 - 23.5)

ଫଳରେ $l = 19.5$, $f = 56$, $c = 87$, $i = 4$

$$\text{ମଧ୍ୟମା (Md)} = l + \frac{m-c}{f} \times i = 19.5 + \frac{100-87}{56} \times 4$$

$$= 19.5 + \frac{13}{14} = 19.5 + 0.93 = 20.43 \qquad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

(d) ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଲେଖ ଓଜାଇଭ (Ogive) ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଲେଖ (Ogive) ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟ ଉକ୍ତ ସାରଣୀରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉଦାହରଣ ସାରଣୀ - H ଓ ସାରଣୀ - I ରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଛି, ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ଉଦାହରଣ - 16 : ସାରଣୀ - H ପ୍ରଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଲେଖ ଅଂକନ କରି ଏହା ସାହାଯ୍ୟରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାରଣୀ - H

ଲବ୍ଧାଙ୍କ .	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ବାରମ୍ବାରତା	: 6	8	8	11	22	36	59	28	21	3

ସମାଧାନ : ସୂଚନା - (i) ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଲେଖ ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ପ୍ରଥମେ ଏହିଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଏଥିଲାଗି ପ୍ରଥମେ ସାରଣୀରେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

(ii) ତା'ପରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ କର ଓ ଆନୁଭୂମିକ ଅକ୍ଷରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଏବଂ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ଅକ୍ଷରେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଦର୍ଶାଅ ।

(iii) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସହ ସେହି ଲବ୍ଧାଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଅଥବା ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ସହ ସେହି ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ନେଇ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେବ ।

(iv) ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ମୁକ୍ତ ହସ୍ତରେ ଯୋଗକଲେ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଓଜାଇଭ୍ (Ogive) ଲେଖ ମିଳିବ ।

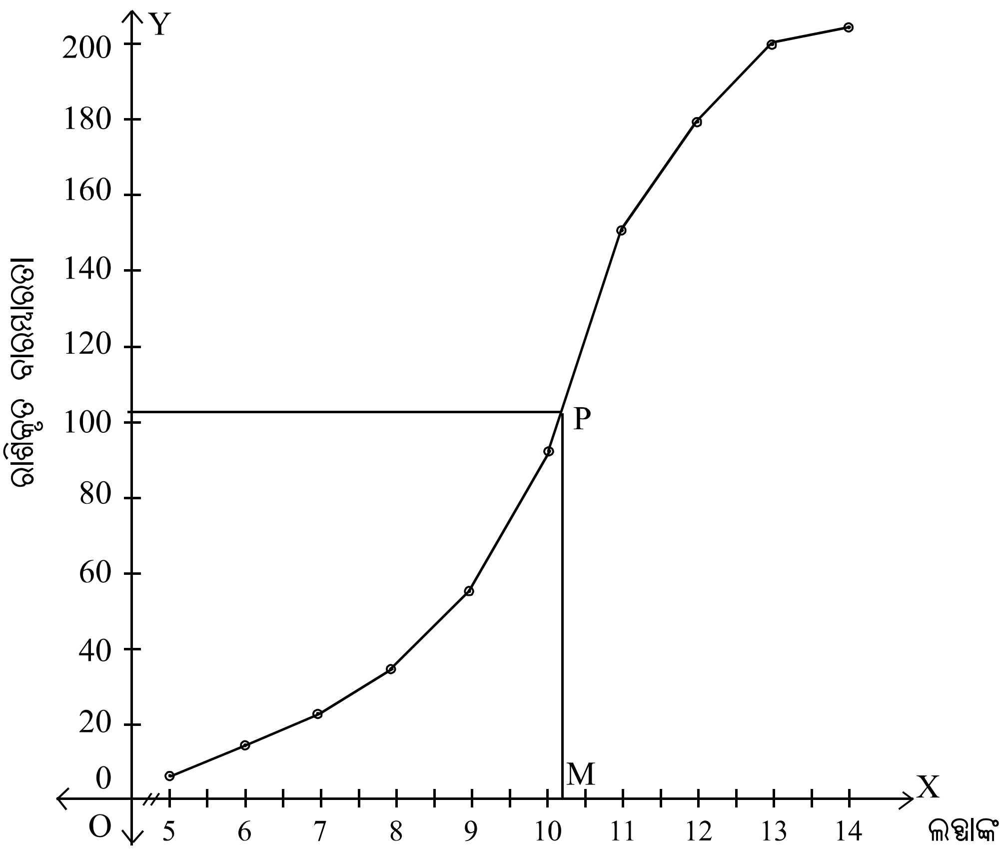
ସାରଣୀ - H_1

ଲବ୍ଧାଙ୍କ :	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ବାରମ୍ବାତା :	6	8	8	11	22	36	59	29	21	3
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା :	6	14	22	33	55	91	150	179	200	203

ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\text{ମଧ୍ୟମା ସ୍ଥାନ (m)} = \frac{n+1}{2} = \frac{203+1}{2} = 102$$

ଲେଖ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (c.f.) = 102



P ବିନ୍ଦୁରୁ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଏକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ଏହାର ପାଦବିନ୍ଦୁ M ହେଉ । ଏଣୁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା = M ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ = 10.2 ପ୍ରାୟ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 17 :

ସାରଣୀରେ 120 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି । ସାରଣୀ- I ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହା ସାହାଯ୍ୟରେ

(i) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) 65% ରୁ ଅଧିକ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

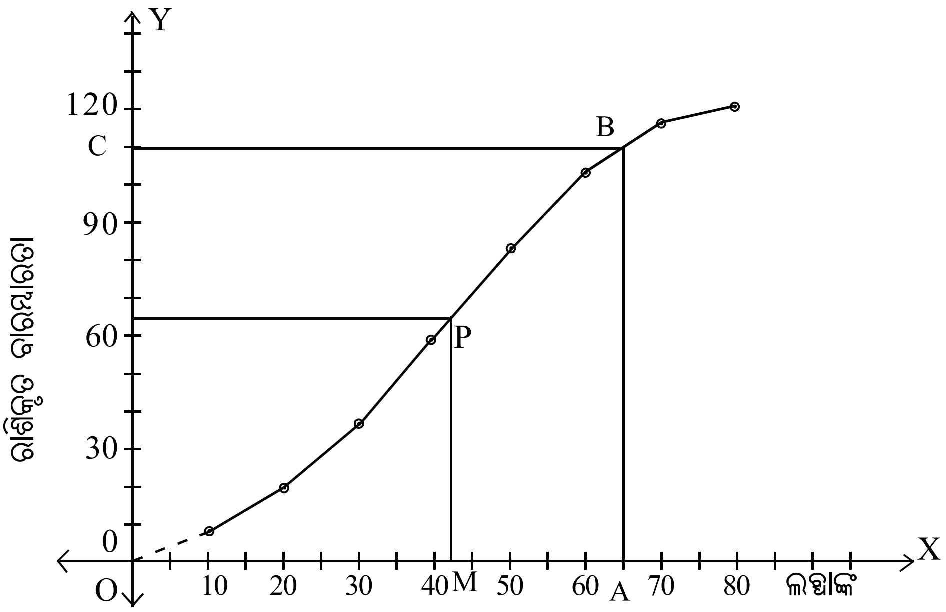
ସାରଣୀ - I

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ବାରମ୍ବାରତା	7	12	18	22	24	20	13	4

ସମାଧାନ :

ସାରଣୀ - I_1

ଲବ୍ଧାଙ୍କ 'x'	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ବାରମ୍ବାରତା 'f'	7	12	18	22	24	20	13	4
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା'c.f'	7	19	37	59	83	103	116	120



ମଧ୍ୟମ ସ୍ଥାନ $= \frac{1}{2}\left[\frac{120}{2}+\left(\frac{120}{2}+1\right)\right] = \frac{1}{2}(60+61) = 60.5$

ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (c.f) ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ଅକ୍ଷର 60.5 ଏକକ ଚିହ୍ନ ପାଖରେ ଅକ୍ଷପ୍ରତି ଲମ୍ବଟିଏ ଅଙ୍କନ କର। ଏହା ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଲେଖ (ogive)କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ତାର ନାମ P ଦିଅ। P ବିନ୍ଦୁରୁ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଏକ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର। ଏହାର ପାଦ ବିନ୍ଦୁ M ହେଉ।

(i) ଏଣୁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା = M ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ = 42 (ପ୍ରାୟ)

(ii) 100 ର 65 % = 65

x - ଅକ୍ଷରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ (A) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଲବ୍ଧାଙ୍କ 65 । A ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯାହା ଲେଖଚିତ୍ରକୁ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । B ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯାହା y - ଅକ୍ଷକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । C ବିନ୍ଦୁର ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି 110 ।

$\therefore$ 65% ରୁ ଅଧିକ ନମ୍ବର ପାଇଥିବା ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା = 120 – 110 = 10 (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (b)

(କ - ବିଭାଗ)

1.(a) ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଟି ଠିକ୍ ତା ପାଖରେ T ଓ ଯେଉଁଟି ଭୁଲ ତା ପାଖରେ F ଲେଖ ।

(i) ଯେକୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା, ସେହି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସହ ସମାନ ।

(ii) ବଡ଼ରୁ ସାନ କ୍ରମାନୁସାରେ ଲେଖାଥିବା 13 ଟି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ଏହାର ଆରମ୍ଭରୁ ସପ୍ତମ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସହ ସମାନ ।

(iii) କୌଣସି ଏକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ସର୍ବଦା ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ।

(iv) 30 ଟି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଥିବା ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା 15 ।

(v) 5, 8, 3, 7, 11, 27, 16, ଏହି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା 8 ।

(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(a) ପ୍ରଥମ ନଅଗୋଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟମା କେତେ ?

(b) ପ୍ରଥମ ଦଶଗୋଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟମା କେତେ ?

(c) ସମସ୍ତ 'x' ର ମାଧ୍ୟମାନ ସ୍ଥିର କର ଯେତେବେଳେ $1 \leq x < 7$

(d) 7, 3, 10, 5, x ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା 'x' ହେଲେ x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ($x \in N$)

(e) ପ୍ରଥମ 6 ଗୋଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟମା ପ୍ରଥମ 7 ଗୋଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟମାଠାରୁ କେତେ କମ୍ ?

(ଖ - ବିଭାଗ)

2. ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 7, 8, 4, 3, 10 (ii) 11, 27, 36, 58, 65, 72, 80, 95

(iii) 7, 12, 15, 6, 20, 8, 4, 10 (iv) 18, 32, 37, 25, 31, 19, 25, 29, 31

3.(i) ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ସ୍ଥିର କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x)	11	12	13	14	15	16
ବାରମ୍ବାରତା (f)	2	4	6	10	8	7

(ii)

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
ବାରମ୍ବାରତା (f)	5	8	15	24	14	9	5	4

(iii) ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ୪0 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଗଣିତ ବିଷୟରେ ପାଇଥିବା ନମ୍ବର ଦିଆଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀ ମଧ୍ୟମା ସ୍ଥିର କର ।

ଗଣିତରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର (x)	10 ରୁ କମ୍	20 ରୁ କମ୍	30 ରୁ କମ୍	40 ରୁ କମ୍	50 ରୁ କମ୍	60 ରୁ କମ୍
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା (f)	3	12	27	57	75	80

4. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ	55	65	75	85	95	105	115	125	135
ବାରମ୍ବାରତା	4	21	35	42	70	28	10	25	15

5. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ସଂଭାଗ ସ୍ଥିର କର ।

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.)	0 ରୁ ଅଧିକ	10 ରୁ ଅଧିକ	20 ରୁ ଅଧିକ	30 ରୁ ଅଧିକ	40 ରୁ ଅଧିକ
ଗଛ ସଂଖ୍ୟା	55	50	40	20	5

(ଗ - ବିଭାଗ)

6. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସଂଭାଗ :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
ବାରମ୍ବାରତା :	4	9	15	14	8

7. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ତୁମେ ଜାଣିଥିବା ଉଭୟ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଉତ୍ତର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ରହିଛି ଦେଖ ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x) :	4	5	6	7	8	9	10
ବାରମ୍ବାରତା (f) :	8	12	21	31	18	13	5

8. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସଂଭାଗ (x)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30- 40	40 - 50	50 - 60
ବାରମ୍ବାରତା (f)	5	12	22	18	10	6

9. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହା ସାହାଯ୍ୟରେ

(i) ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ

(ii) 65% ରୁ ଅଧିକ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ନମ୍ବର :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ବାରମ୍ବାରତା :	5	10	20	25	15	12	9	8

10. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ନେଇ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରି ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସଂଭାଗ :	0 - 8	8 - 16	16 - 24	24 - 32	32 - 40	40 - 48	48 - 56
ବାରମ୍ବାରତା :	4	8	14	23	15	11	5

11. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀରେ ଥିବା କେତେକ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ଦିଆଯାଇନାହିଁ । ଯଦି ବାରମ୍ବାରତା ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି 74 । ତଥ୍ୟାବଳୀର ମଧ୍ୟମା 36 ହୋଇଥାଏ । ତେବେ ଆମକୁ ଜଣା ନ ଥିବା ଦୁଇ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସ୍ଥିର କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ବାରମ୍ବାରତା :	2	8	?	20	12	?	4	3

12. 200 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଗଣିତ ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଶତକଡ଼ାରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ନମ୍ବର ଶତକଡ଼ାରେ:	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60-69	7 0-79	80 - 89
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା :	6	12	20	46	57	37	15	7

(i) ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରି ମଧ୍ୟମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଗଣିତରେ 45% ନମ୍ବର ହାସଲ କରିଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5.2.3 ଗରିଷ୍ଠକ (Mode)

(i) ବ୍ୟାଟସ୍‌ମ୍ୟାନ୍ ତେନ୍ଦୁଲକର ଏକ କ୍ରିକେଟ ମ୍ୟାଚ୍‌ରେ 6 ଟି ବଲ୍‌ର ସମ୍ମୁଖୀନ ହୋଇ ସଂଗ୍ରହ କରିଥିବା ରନ୍ ହେଲା 4, 2, 6, 4, 4, 0; '4' ଲବ୍ଧାଙ୍କଟି ସର୍ବାଧିକ ତିନିଥର ଅଛି । ତେଣୁ ଏହ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ Mo = 4

(ii) ନିମ୍ନ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନ ସାରଣୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x)	2	3	4	6
ବାରମ୍ବାରତା (f)	25	15	12	10

ଏହି ବଣ୍ଟନରେ 2 ଲବ୍ଧାଙ୍କଟି ସର୍ବାଧିକ 25 ଥର ରହିଥିବାରୁ ଉକ୍ତ ବଣ୍ଟନର ଗରିଷ୍ଠକ Mo = 2

(iii) ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଦଶଥର ଗଡ଼ାଇବାରୁ 3, 6, 3, 2, 5, 5, 1, 3, 2, 2 ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନ ମିଳିଲା । ଏଠାରେ 2 ଓ 3 ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସର୍ବାଧିକ 3 ଥର ଲେଖାଏଁ ରହିଥିବାରୁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ Mo ହେଉଛି 2 ଓ 3 ।

ସଂଜ୍ଞା : କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀରେ ସର୍ବାଧିକ ବାର ରହିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ (ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମାନ) ହିଁ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ) ଭାଗବିହୀନ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନରେ ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମାନ) ହିଁ ଉକ୍ତ ବଣ୍ଟନର ଗରିଷ୍ଠକ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ସମାନ । ତେବେ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନାହିଁ ବୋଲି କହିବା । ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

3, 5, 7, 3, 8, 5, 8, 7 ଏଠାରେ କୌଣସି ଗରିଷ୍ଠକ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 18 : ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ବାରମ୍ବାରତା :	3	8	12	15	14	17	12	8	6

ସମାଧାନ : ଲବ୍ଧାଙ୍କ 13 ର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ

.: ଗରିଷ୍ଠକ $M_0 = 13$

ଉଦାହରଣ - 19 : ଗୋଟିଏ ବଗିଚାରେ ଏକା ଦିନରେ ଲଗା ଯାଇଥିବା 10 ଟି ଚାରା ଗଛର ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ) ହେଲା : 22, 24, 19, 21, 33, 21, 24, 22, 20, 22 । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକୁ ସାନରୁ ବଡ଼ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖିଲେ - 19, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 24, 24 । ଏଠାରେ ଗରିଷ୍ଠକ Mo = 22 (.: 22 ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ)

ଉଦାହରଣ - 20 : ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (x) :	5	6	7	8	9	10	11	12
ବାରମ୍ବାରତା (f) :	7	18	25	24	20	25	19	13

ସମାଧାନ : ସାରଣୀରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଲବ୍ଧାଙ୍କ 7 ଓ 10 ର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ 7 ଏବଂ 10 ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ (M) ମଧ୍ୟମା (M_d) ଏବଂ ଗରିଷ୍ଠକ (M_o) ମଧ୍ୟରେ ଏକ ସାଧାରଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଛି । ଏହା ଏକ ଆନୁଭବିକ ସମ୍ବନ୍ଧ (Empirical Relation) ଅଟେ ।

ସମ୍ବନ୍ଧଟି ହେଲା : $\boxed{M_0 = 3M_d - 2M}$

ଅନୁଶୀଳନୀ 5 (c)

1. ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଟି ଠିକ୍ ତା ପାଖରେ T ଓ ଯେଉଁଟି ଭୁଲ୍ ତା ପାଖରେ F ଲେଖ ।

(i) ଏକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସମାନ ସମାନ ଥର ରହିଲେ ଏହି ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନାହିଁ ।

(ii) ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ହିଁ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀ ଗରିଷ୍ଠକ ।

(iii) ଏକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଯଦି ଗରିଷ୍ଠକ ଥାଏ, ତେବେ ଏହାର ସର୍ବଦା ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଗରିଷ୍ଠକ ଥିବ ।

2. ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12

(ii) 12, 8, 15, 9, 11, 8, 10, 11, 13, 9, 12, 10, 14, 11, 13, 10

3. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.) ଲବଧାଙ୍କ	120	121	122	123	124
ବାରମ୍ବାରତା	5	8	18	10	9

4. ଦୁଇଟି ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଏକା ସାଙ୍ଗରେ 15 ଥର ଗଡ଼ାଇବାରେ ମିଳିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ 7, 8, 10, 10, 11, 7, 12, 9, 7, 9, 8, 12, 11, 10, 7 । ଉକ୍ତ ବଣ୍ଟନର ଗରିଷ୍ଠକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଗୋଟିଏ ଜୋତା ଦୋକାନରେ ବିଭିନ୍ନ ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ ଜୋତା ବିକ୍ରୟର ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଜୋତାମାପ	5	6	7	8	9	10
ବିକ୍ରି ସଂଖ୍ୟା	20	33	40	85	15	8

(i) ଉପରିସ୍ଥ ବଣ୍ଟନକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି କେଉଁ ମାପର ଜୋତାକୁ ମହଜୁଦ ରଖିବା ଲାଗି ଦୋକାନୀ ଅଧିକ ଧ୍ୟାନ ଦେବ, ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର କେଉଁ ପ୍ରକାର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା ତୁମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲ ?

ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି

(CO-ORDINATE GEOMETRY)

TBE4S4

6.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଏବଂ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁସ୍ଥାପନ, ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିରୂପଣ ଏବଂ ଦୁଇଅଜ୍ଞାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଅବଗତ ଅଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେମାନେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ନିରୂପିତ ଦୁଇ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା, ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର ଏବଂ ସ୍ଥାନଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ର ସୂତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବ । ଉକ୍ତ ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକର ସଫଳ ପ୍ରୟୋଗ କରି କଠିନ ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କରିବାରେ ସମର୍ଥ ମଧ୍ୟ ହୋଇ ପାରିବ ।

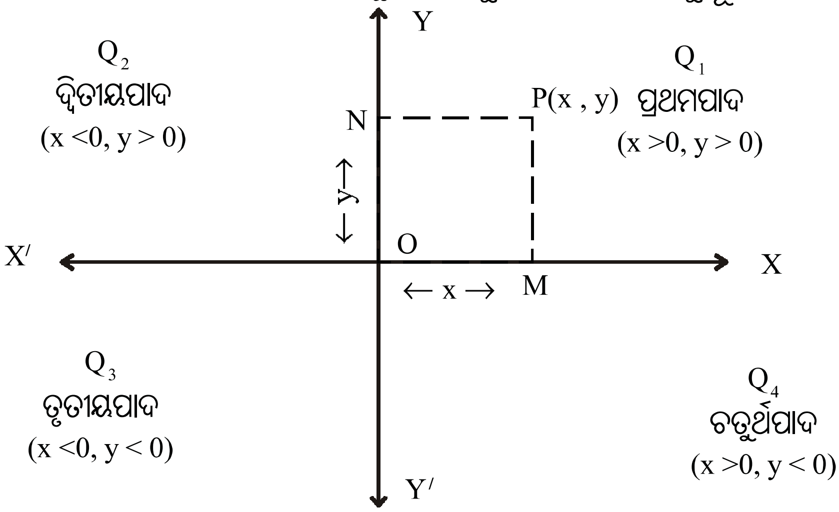
6.2 କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ ଓ କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Cartesian plane and Cartesian co-ordinates) :

ବୀଜଗଣିତରେ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ । ସେଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇପାରିବ ଏବଂ ବିପରୀତକ୍ରମେ ସରଳରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇପାରିବ । କିନ୍ତୁ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାର ବାହାରେ, ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ଏହିପରି ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ପାଇଁ ଆମେ ନିମ୍ନ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରିପାରିବା ।

ମନେକର କାଗଜର ଉପର ପୃଷ୍ଠତଳ ଆମର ଆଲୋଚ୍ୟ ସମତଳ ଓ ଏହି ସମତଳ ଉପରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ଅବସ୍ଥିତି ଆମେ ନିରୂପଣ କରିବା (ଚିତ୍ର 6.1) । ଏଠାରେ ଆମେ ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ନେବା ଯେପରିକି ସେମାନେ ସମକୋଣରେ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ । $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ସଂଖ୍ୟାରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x- ଅକ୍ଷ (x-axis) ଓ y- ଅକ୍ଷ (y-axis) କୁହାଯାଏ ଏବଂ O ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) କୁହାଯାଏ । ଯେହେତୁ

ଏହି ସମତଳଟି ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ତେଣୁ ଏହାକୁ R x R ବା R^2– ସମତଳ (R^2-Plane) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ R^2- ସମତଳକୁ ଚାରିଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ପାଦ (Quadrant) କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଥା ଅନୁସାରେ XOY ପାଦକୁ ପ୍ରଥମପାଦ (first quadrant, Q_1), YOX' କୁ ଦ୍ୱିତୀୟପାଦ (Second quadrant, Q_2) $X'OY'$ କୁ ତୃତୀୟପାଦ (third quadrant, Q_3) ଓ $Y'OX$ କୁ ଚତୁର୍ଥପାଦ (Fourth quadrant, Q_4) କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{PM}$ ଲମ୍ବ ଓ y- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{PN}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ଯଦି x – ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ M ବିନ୍ଦୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ y– ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ



(ଚିତ୍ର 6.1)

N ବିନ୍ଦୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା y କୁ ସୂଚାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ OM = NP = | x | ଏବଂ ON = MP = | y |, ତେବେ ଆମେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (ordered pair) (x,y) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରିପାରିବା ଏବଂ ଲେଖିଲାବେଳେ ଆମେ ଏହାକୁ P(x, y) ହିସାବରେ ଲେଖିବା । ।

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କୁ P ବିନ୍ଦୁର **x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x-co-ordinate) ବା ଭୁଜ (abscissa)** ଏବଂ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା y କୁ P ବିନ୍ଦୁର **y ସ୍ଥାନାଙ୍କ (y-coordinate) ବା କୋଟି (ordinate)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ (ପ୍ରଥମେ x ଓ ପରେ y) ଆବଦ୍ଧ ହେଉଥିବାରୁ ଏହାକୁ ଏକ **କ୍ରମିତ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ି (ordered pair)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କର ପ୍ରଥମ ସଂଖ୍ୟାଟି x-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଖ୍ୟାଟି y- ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ବୁଝାଏ । ସର୍ବପ୍ରଥମେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଥିବା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଜନକ ଡେକାର୍ଟେଙ୍କ ନାନାନୁସାରେ P ବିନ୍ଦୁର ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Cartesian co-ordinates)** କୁହାଯାଏ । ବିନ୍ଦୁଟି ଯେଉଁ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ, ସେ ସମତଳକୁ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian plane)** କୁହାଯାଏ ।

ସମତଳଟି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁପାଇଁ ଏକ କ୍ରମିତ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ି ରହିଛି । ତେଣୁ ସେଟ୍ ଭାଷାରେ ସମତଳକୁ ଲେଖିପାରିବା :

ସମତଳ = $\{(x, y) \mid x, y \in R\}$

ତୁମେ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ପୁସ୍ତକରେ ପଢ଼ିଛ, $(x, y) \in R \times R$ ବା $(x, y) \in R^2$

ତେଣୁ ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳକୁ **R^2- ସମତଳ (R^2-plane) ବା କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian Plane)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

$A \times B$ ର ସଂଜ୍ଞା $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ ହେଲେ $A \times B = \{(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,3),(3,4)\}$ ।

ସେହିପରି $B \times A = \{(b,a) \mid a \in A, b \in B\}$ ଏବଂ $B \times A = (3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)$

ଯଦି $A = B = R$ (ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ) ତେବେ କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ ସେଟ୍

$R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ ଓ ଏହାକୁ R^2 ରୂପେ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ବିସ୍ତୃତ ଆଲୋଚନା କରିବା । $\overleftrightarrow{X'OX}$ ଅକ୍ଷର $\overrightarrow{OX}$ କୁ x- ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗ, $\overrightarrow{OX'}$ କୁ ଋଣଦିଗ କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $\overrightarrow{OY}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OY'}$ କୁ $\overleftrightarrow{Y'OY}$ ଅକ୍ଷର ଯଥାକ୍ରମେ ଧନଦିଗ ଓ ଋଣଦିଗ ଭାବେ ନିଆଯାଇଥାଏ ।

ପ୍ରଥମେ x- ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ M (ଚିତ୍ର 6.1) ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଉ । ଏହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ x ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ । କାରଣ x- ଅକ୍ଷଠାରୁ $\overrightarrow{OY}$ ବା $\overrightarrow{OY'}$ ଦିଗରେ M ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ଶୂନ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ।

(i) ତେଣୁ x- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, 0)$ ଅର୍ଥାତ୍ x- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ $= 0$ ।

(ii) ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0, y)$ ଅର୍ଥାତ୍ y- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର x ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ।

(iii) ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଉଭୟ ଅକ୍ଷର ପରସ୍ପର ଛେଦବିନ୍ଦୁରେ ଥିବାରୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(0, 0)$ ଅଟେ ।

(iv) (a) ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x > 0, y > 0$, ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ଉଭୟେ ଧନାତ୍ମକ ।

(b) ଦ୍ୱିତୀୟପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x < 0, y > 0$; ଅର୍ଥାତ୍ x ଋଣାତ୍ମକ ଓ y ଧନାତ୍ମକ ।

(c) ତୃତୀୟପାଦର ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x < 0, y < 0$; ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ଉଭୟେ ଋଣାତ୍ମକ ।

(d) ଚତୁର୍ଥପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ପାଇଁ $x > 0, y < 0$, ଅର୍ଥାତ୍ x ଧନାତ୍ମକ ଓ y ଋଣାତ୍ମକ ।

(v) ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ପାଦରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହଁନ୍ତି ।

(vi) x- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ହେତୁ x- ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y = 0$ । ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 0 ହେତୁ y- ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = 0$ ।

6.3 ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା (Distance between two given points) :

ଉପପାଦ୍ୟ - 1:

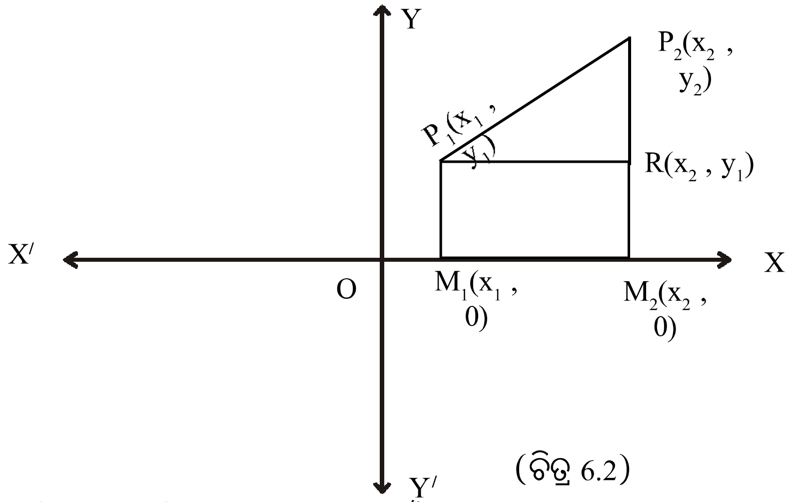
ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଓ $P_2(x_2, y_2)$ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଦୂରତା

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ଦତ୍ତ : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଏବଂ $P_2\,(x_2, y_2)$ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ଅଙ୍କନ : ଏକ ସମତଳରେ P_1 ଓ P_2 ଦୁଇଟି ବୁନ୍ଦୁ (ଚିତ୍ର 6.2) । ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) । $\overline{P_1P_2}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର । P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ x-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{P_1M_1}$ ଓ $\overline{P_2M_2}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ପୁନଶ୍ଚ, P_1 ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{P_2M_2}$ ପ୍ରତି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overline{P_1R}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 6.2)

ପ୍ରମାଣ : $OM_1 = x_1, OM_2 = x_2, M_1P_1 = y_1$ ଓ $M_2P_2 = y_2$

ତେଣୁ $P_1R = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$

ଏବଂ $RP_2 = M_2P_2 - M_2R = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1$

ଯେହେତୁ P_1RP_2 Δ ରେ $m\angle P_1RP_2 = 90^0$, ତେଣୁ ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ଯେହେତୁ ଦୂରତା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା,

ତେଣୁ $P_1P_2 = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ଅଥବା $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା = $\sqrt{x\text{- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ବର୍ଗ} + y\text{- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ବର୍ଗ}}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ମୂଳବିନ୍ଦୁ O (0,0) ରୁ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x, y) ର ଦୂରତା $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : P_1, P_2 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$ ଓ y-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $P_1P_2 = |y_2 - y_1|$ ହେବ ।

ନିମ୍ନରେ ସମାହିତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଦୂରତା ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ -1 : P(0, –5) ଓ Q(4, –6) ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 0, y_1 = -5, x_2 = 4, y_2 = -6$

ଅତଏବ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-5-(-6))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-5+6)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A(0,6), B(2,3) ଓ C(4,0) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ।

ସମାଧାନ : $AB = \sqrt{(0-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

$BC = \sqrt{(2-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ଏବଂ

$AC = \sqrt{(0-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $AB + BC = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13} = AC$

ସୁତରାଂ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ଏବଂ A-B-C (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ -3 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ A(–2,3), B (5, –2), C(3,–4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ Δ ର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : A(–2,3), B (5, –2), C(3,–4) ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । ଦୂରତା ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

$AB = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

$CB = \sqrt{(3-5)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $AB = AC = \sqrt{74}$, $\Rightarrow \Delta$ ABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 : y -ଅକ୍ଷ ଉପରେ A (6, 5) ଓ B (-4, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,y) । ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ AP=BP ।

$AP = \sqrt{(0-6)^2 + (y-5)^2}$ ଏବଂ $BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(0-6)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(3-y)^2}$ ($\because AP = BP$)

$\Rightarrow \sqrt{36+(y-5)^2} = \sqrt{16+(3-y)^2} \Rightarrow 36 + y^2 - 10y + 25 = 16 + 9 - 6y + y^2$

$\Rightarrow 10y - 6y = 36 + 25 - 16 - 9 \Rightarrow 4y = 36 \quad \Rightarrow y = 9$

ତେଣୁ A(6,5) ଓ B (–4, 3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁଟି P(0,9) ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A(1,0), B(5,3) ଓ C(4, –4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ A(1,0), B(5,3) ଓ C(4, –4)

ଅତଏବ $AB = \sqrt{(1-5)^2+(0-3)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(5-4)^2+(3-(-4))^2} = \sqrt{(1)^2+(7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$CA = \sqrt{(4-1)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore AB = CA$ ଏବଂ ଯେହେତୁ $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50 = BC^2$,

$\therefore \Delta$ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।   (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଉଦାହରଣ - 6 : A(3,5) ଓ B(–2,4) ଦୁଇଗୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ y -ଅକ୍ଷକୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : C ବିନ୍ଦୁଟି y -ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ହେତୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମନେକର (0,y) । ଯେହେତୁ C ବିନ୍ଦୁଟି $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ; ଏହା ଉଭୟ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । ଅର୍ଥାତ୍ AC = BC

$AC = \sqrt{(3-0)^2+(5-y)^2}$ ଏବଂ $BC = \sqrt{(-2-0)^2+(4-y)^2}$

$\because AC = BC \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2+(5-y)^2} = \sqrt{(-2-0)^2+(4-y)^2} \Rightarrow 3^2+(5-y)^2 = (-2)^2 + (4-y)^2$

$\Rightarrow 9 + 25 - 10y + y^2 = 4 + 16 - 8y + y^2 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$

$\therefore$ C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,7)   (ଉତ୍ତର) ।

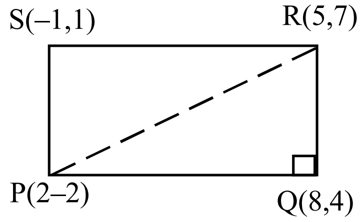
ଉଦାହରଣ - 7 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P(2–2), Q(8,4), R(5,7) ଓ S(–1,1) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ସମାଧାନ : $PQ = \sqrt{(8-2)^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$;

$QR = \sqrt{(5-8)^2+(7-4)^2} = \sqrt{(-3)^2+(3)^2} = 3\sqrt{2}$;

$RS = \sqrt{(-1-5)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$ ଏବଂ

. $SP = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$



(ଚିତ୍ର 6.3)

ଅର୍ଥାତ୍ $PQ = RS$ ଓ $QR = SP$

ପୁନଶ୍ଚ $PR^2 = (5-2)^2 + \{7-(-2)\}^2 = 3^2 + 9^2 = 90$

ଏବଂ $PQ^2 + QR^2 = (6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 90 = PR^2 \Rightarrow m\angle PQR = 90^0$

$\therefore$ PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ବି.ଦ୍ର. : PQRS ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ହେବା ପାଇଁ PS = QR, PQ = RS ଓ PR = QS ର ପ୍ରମାଣ ଯଥେଷ୍ଟ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (0, 0) ଓ (4, 3) (ii) (0, 2) ଓ (-6, 2)

(iii) (-3, 0) ଓ (5, 6) (iv) (2, 4) ଓ (1, 3)

(v) (-2, -2) ଓ (-3, -5) (vi) (a, -b) ଓ (-a, b)

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ସ୍ଥିର କର ।

(i) (0, 1) ଓ (-1, 0) (ii) (2, 3) ଓ $(4, \frac{3}{2})$

(iii) $(\sqrt{7}, \sqrt{19})$ ଓ $(-\sqrt{7}, -\sqrt{19})$ (iv) (4, –2) ଓ (2, 4) (v) (0, 4) ଓ (2, 2)

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ABC ତ୍ରିଭୁଜମାନ ସମକୋଣୀ । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କେଉଁ କୋଣଟି ସମକୋଣ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) A (3, 3), B(9, 0) ଓ C(12, 21) (ii) A(1, 1) B(3, 4) ଓ C(0, 6)

(iii) A(–1, –2), B(5, –2) ଓ C(5, 6) (iv) A(12, 8), B(–2, 6) ଓ C(6, 0)

(v) A(1, 6), B(5, –1) ଓ C(7, 2)

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନୋକ୍ତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ABC ତ୍ରିଭୁଜମାନ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

(i) A (8, 2), B(5, –3) ଓ C(0, 0) (ii) A(0, 6) B(–5, 3) ଓ C(3, 1)

(iii) A (8, 9), B(–6, 1) ଓ C(0, –5) (iv) A(7, 1) B(11, 4) ଓ C(4, –3)

(v) A (0, 0), B(4, 0) ଓ C(0, – 4) (vi) A(2, 2) B(–2, 4) ଓ C(2, 6)

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୂଚିତ ଚିତ୍ରକୁ ଗଠନ କରବ ।

(i) (1, 1), (–1, –1), $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(ii) (3, –3), (–3, 3), $(3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(iii) (1, 2), (3, 4) ଓ (5, 8) (ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(iv) (1, 2), (2, 4) ଓ (3, 5) (ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

(v) (–2, 3), (8, 3) ଓ (6,7) (ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ)

(vi) (–6, –8), (–16, 12) ଓ (–26, –18) (ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ)

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୂଚିତ ଚିତ୍ରକୁ ଗଠନ କରିବ ।

(i) (–8, 3), (–2, –1), (6, –2) ଓ (0, 2) (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର)

(ii) (–2, –1), (1, 0), (4, 3) ଓ (1, 2) (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର)

(iii) (0, –1), (2, 1), (0, 3) ଓ (–2, 1) (ବର୍ଗ ଚିତ୍ର)

(iv) (0, 5), (–1, 2), (–4, 3) ଓ (–3, 6) (ବର୍ଗ ଚିତ୍ର)

(v) (–2, 3), (–4, –1), (–6, 0) ଓ (–4, 4) (ଆୟତ ଚିତ୍ର)

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ P(1, 1) ବିନ୍ଦୁ A (0,2), B (2, 0) ଓ C (0, 0) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ।

8. x ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ C (x, 3) ବିନ୍ଦୁ, A (2, 4) ଓ B (3, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ରହିବ ?

9. P (2, y) ବିନ୍ଦୁ Q (–1, 2) ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ 5 ଏକକ ଦୂରରେ ରହିଲେ, y ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (1, 1), B (2, 2) ଓ (C (3, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ ।

11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (1, 4), B (–1, 6), C (2, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ।

12. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (1, 0), (2, –3) ଏବଂ (–1, 6) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ଓ (1, 0) ବିନ୍ଦୁଟି ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅଟେ ।

13. x ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ଯାହା (5, 4) ଓ (–2, 3) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ।

14. ଯଦି O (0, 0), A (1, 2), B (3, 8) ଏବଂ C (3, –1) ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, AB = 2CO ।

15. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 3) ବିନ୍ଦୁ (4, 3) ହେଲେ, ତୃତୀୟ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

6.4 ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର (Division Fermula) :

ସଂଜ୍ଞା : ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ :

ଯଦି A – P – B ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ P ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AP}$ ଓ $\overline{PB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ ହୁଏ ।

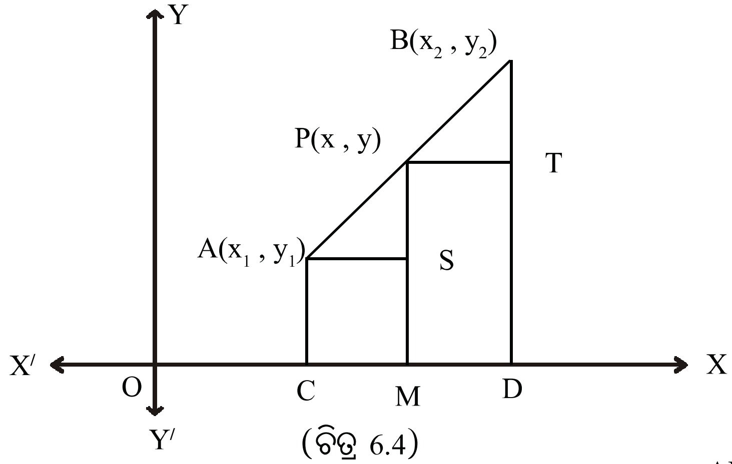
ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ AP + PB = AB ହୁଏ ଓ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ ହୋଇଥିବା ଦୁଇ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ AP : PB ।

ଯଦି P ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ m : n ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ, ଆମେ ଲେଖିବା ଯେ, $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ ।

କିନ୍ତୁ P ବିନ୍ଦୁ $\overline{BA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ r : s ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କଲେ, ଆମେ ଲେଖିବା ଯେ, $\frac{PB}{PA} = \frac{r}{s}$ ।

ଉପପାଦ୍ୟ – 2 :

$A(x_1, y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$, ଯଦି $P(x, y)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା m : n ଅନୁପାତରେ ଅର୍ନ୍ତବିଭାଜିତ ହୁଏ, ତେବେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 6.4)

ଦତ୍ତ : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉପରିସ୍ଥ P ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$ ।

ମନେକର A, B ଓ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ଏବଂ (x, y) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

ଅଙ୍କନ : A, P ଓ B ରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AC}$, $\overline{PM}$ ଏବଂ $\overline{BD}$ ଲମ୍ବ ଏବଂ $\overline{AS} \perp \overline{PM}$, $\overline{PT} \perp \overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ASP ଏବଂ Δ PTB ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ

$m\angle PSA = m\angle BTP = 90^0$

$m\angle PAS = m\angle BPT$ (ଅନୁରୂପ)

$\therefore \Delta ASP$ ଓ ΔPTB ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ, ଅର୍ଥାତ୍ $\Delta ASP \sim \Delta PTB$ ।

ତେଣୁ $\frac{AS}{PT} = \frac{PS}{BT} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{AS}{PT} = \frac{m}{n}$ ଏବଂ $\frac{PS}{BT} = \frac{m}{n}$

ମାତ୍ର $AS = CM = x - x_1$, $PT = MD = x_2 - x$ ଏବଂ $PS = PM - SM = PM - AC = y - y_1$

$BT = BD - TD = TD - PM = y_2 - y$

$\frac{AS}{PT} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow mx_2 - mx = nx - nx_1 \Rightarrow mx_2 + nx_1 = mx + nx$

$$\Rightarrow x(m+n) = mx_2 + nx_1 \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

ସେହିପରି, $\frac{PS}{BT} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n} \Rightarrow my_2 - my = ny - ny_1 \Rightarrow my_2 + ny_1 = my + ny$

$$\Rightarrow y\,(m+n) = my_2 + ny_1 \Rightarrow y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

ତେଣୁ $A\,(x_1, y_1)$ ଓ $B\,(x_2, y_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗକାରୀ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ କୁ m : n ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ ଅଟେ ।

ସୂଚନା : A, B ଓ P ବିନ୍ଦୁ ଯେକୌଣସି ପାଦ (quadrant) ରେ ରହିଲେ ମଧ୍ୟ . ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ । (ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କ୍ଷେତ୍ରରେ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) ଯଦି A–B–P ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $\overrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ $\overline{AB}$, P ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BP}$ ରେଖାଖଣ୍ଡରେ ବହିର୍ବିଭକ୍ତ ହୋଇଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଏଠାରେ ବହିର୍ବିଭାଜନର ଅନୁପାତ AP : BP ହେବ ଓ AP–PB = AB ହେବ ।

(iii) $\frac{AP}{BP} < 1$ ହେଲେ P –A–B ଏବଂ $\frac{AP}{BP} > 1$ ହେଲେ A – B – P ହେବ ।

(iv) $A(x_1, y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$, ଯଦି P(x,y) ଦ୍ୱାରା m:n ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜିତ ହୁଏ ତେବେ P(x, y) ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1: ଯଦି P ବିନ୍ଦୁଟି $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ m = n ହୁଏ ଏବଂ

ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ- 8 : (1,–2) ଓ (–3,–4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A(1, –2) ଓ B(–3, –4) ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଓ P(x, y), $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ଏଠାରେ $x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = -3, y_2 = -4$

ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$ ଓ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$

∴ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲା P(1, -3) ।

ଉଦାହରଣ - 9 : ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (3,5) ଓ ଏହାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (2,1) ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ହେଲା $P(x_2, y_2)$ ।

ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ଏବଂ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ $(x, y) = (2, 1)$

ସୂତ୍ରାନୁସାରେ, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ବା $x_2 = 2x - x_1 = 2 \times 2 - 3 = 1$

ଏବଂ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ବା $y_2 = 2y - y_1 = 2 \times 1 - 5 = -3$

$\therefore$ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟି ହେଲା : $(1, -3)$ ।

ଉଦାହରଣ - 10 : A(2, 3) ଓ B(5, -3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1:2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = 5, y_2 = -3; m = 1, n = 2$

ସୁତରାଂ, (i). ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି P(x, y) ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରେ

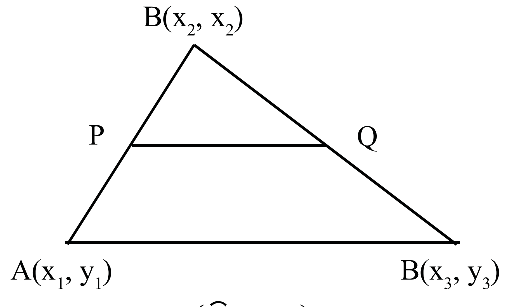
x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \dfrac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1+2} = 3$ ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\dfrac{my_2 + ny_1}{m+n} = \dfrac{1 \times (-3) + 2 \times 3}{1+2} = 1$

ତେଣୁ $\overline{AB}$ କୁ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା . ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଲା : (3, 1) ।

ଉଦାହରଣ - 11 : ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ABC ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ଯଥାକ୍ରମେ A, B, C ଓ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ଓ (x_3, y_3) ।

P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 6.5)

$\therefore$ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନଙ୍କ = $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ଏବଂ

Q ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ = $\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$

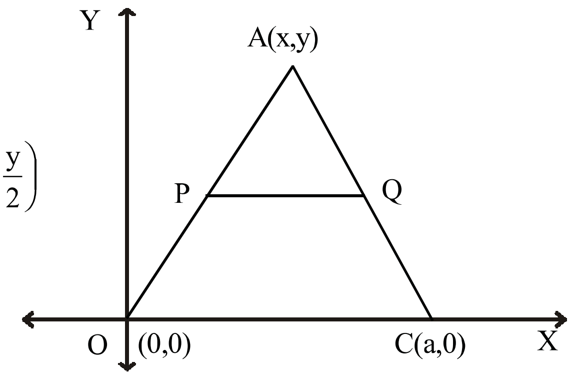
AC = $\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

ଏବଂ $PQ = \sqrt{\left\{\dfrac{(x_2 + x_3)}{2} - \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}\right\}^2 + \left\{\dfrac{(y_2 + y_3)}{2} - \dfrac{(y_1 + y_2)}{2}\right\}^2}$

$= \sqrt{\dfrac{1}{4}(x_3 - x_1)^2 + \dfrac{1}{4}(y_3 - y_1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \dfrac{1}{2}AC$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରମାଣ :

ΔOAC ର $O(0,0)$, $C(a,0)$ ଏବଂ $A(x,y)$



(ଚିତ୍ର 6.6)

P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $P\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ ଓ $Q\left(\frac{x+a}{2},\frac{y}{2}\right)$

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{x}{2}-\frac{x+a}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}OC \quad \therefore PQ = \frac{1}{2}OC$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(b)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଯଦି $(1, -2)$ ବିନ୍ଦୁଟି $(4, 2)$ ଓ $(K, -6)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହୁଏ, ତେବେ $k =$ ------ ।

[–2, 2, –4, 4]

(ii) $(-2, 3)$ ଓ $(3, -2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି ------ । $\left[(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right]$

(iii) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଯଦି ରେଖାଖଣ୍ଡଟିର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ $(2, 3)$ ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ----- । $[(-2, 3), (2, -3), (-2, -3), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)]$

(iv) $(0, 2)$ ଓ $(2, 0)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $1 : 2$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ------------- । $\left[\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)(-2,4)(4,-2)\right]$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(3, 4), (1, -2)$ (ii) $(-1, 3), (4, 0)$ (iii) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ (iv) $(0, -3), (-4, 0)$

(v) $(-1, -2), (3, -1)$ (vi) $(a, b), (c, d)$ (vii) $(-2, 1), (-3, -4)$ (viii) $(at_1^2, 2at), (at_2^2, 2at_2)$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଦୁଇବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $(-1, 2)$ । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ h ଓ k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(h, -1), (2, k)$ (ii) $(5, 3), (h, k)$

(iii) $(1 + h, k), (k, -h - 1)$ (iv) $(h - k, k - h), (2h, 2k)$

4. (0, 0) ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ । ଯଦି ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (2, 3) ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (-2, 4) ଏବଂ (1, 2), ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଓ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (3, 5) ଏବଂ (2, 1) ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

7. x ଓ y ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ (6, -2) ଓ (2, –4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଏବଂ (x, 1) ଓ (-2, y) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବେ ।

8. (2, 3) ଓ (1, 4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. (-2, 3) ଓ (5, -7) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3 : 4 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଯଦି (5, 9) ବିନ୍ଦୁଟି, (7, -3) ଓ (4, k) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ, ତେବେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।

ସୂଚନା : (i) ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଭରକେନ୍ଦ୍ର (Centroid) କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଭରକେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟମାକୁ 2:1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭକ୍ତ କରେ ।

12. (h,5), (–4,k) ଓ (8,9) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–2, 6) ହେଲେ h ଓ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. Δ ABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1, 1) । A (3, -4), B (-4, 7) ହେଲେ, C ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

14. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାନ (-4, 1) ଓ (3, -4) ଏବଂ (1, 3) ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହାର ଭରକେନ୍ଦ୍ର ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

15. A ଓ B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1, 2) ଓ (5, -4) । ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କର, ଯେପରି ବିନ୍ଦୁଟିର A ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଦୂରତା, B ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଦୂରତାର 3 ଗୁଣ ହେବ ।

16. (1,5) ଓ (7,2) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. O(0,0), A(2a, 0) ଓ B(0, 2b) ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ OAB ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ଏବଂ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

18. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

19. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ସୂଚନା : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ A,B,C,D ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (0,0), (a,0), (a,b) ଓ (0,b) ନିଅ ।

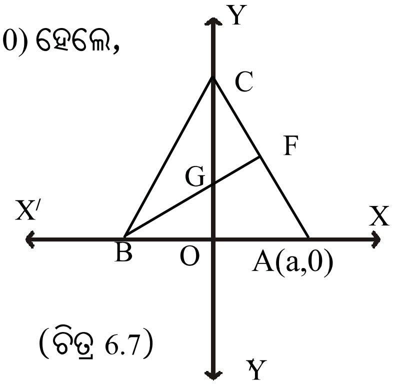
20. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, 0) ହେଲେ,

(i) ଅନ୍ୟ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\overline{BE}$ ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) G ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 6.7)

6.5 ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a triangle) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}$ ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ।

ଏହି ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ।

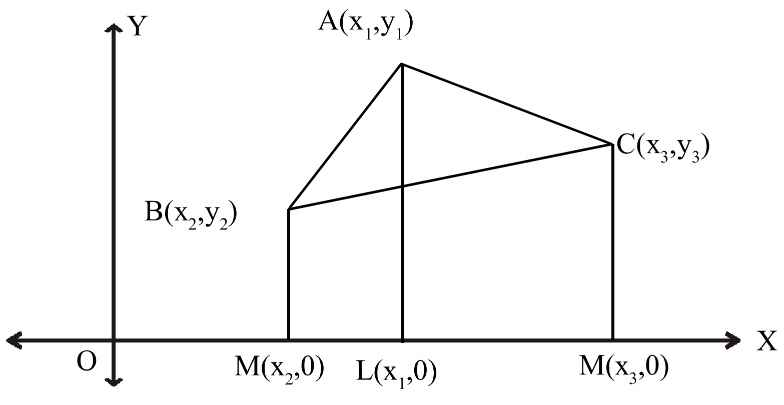
ଉପପାଦ୍ୟ - 3 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ହେଲେ,

ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$

(∵ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏକ ଧନରାଶି, ତେଣୁ ଏଠାରେ ମଡ୍ୟୁଲସ୍ | | ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି ।)

ଦତ୍ତ : ସମତଳରେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ନିଆଯାଉ । ଏହାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A,B,C ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ଏବଂ (x_3, y_3) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$



(ଚିତ୍ର 6.8)

ଅଙ୍କନ : A,B ଓ C ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AL}, \overline{BM}$ ଓ $\overline{CN}$ ଲମ୍ବମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ସ୍ଥାନାଙ୍କର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ $OL = x_1, OM = x_2, ON = x_3$ ଓ $AL = y_1, BM = y_2, CN = y_3$

ଚିତ୍ରରେ $ML = OL - OM = x_1 - x_2$ ଓ $MN = ON - OM = x_3 - x_2$

ଅଙ୍କିତ ଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ALMB ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ALNC ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – BCNM ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2}ML(LA + MB) + \frac{1}{2}LN(LA + NC) - \frac{1}{2}MN(MB+NC)$$

($\because$ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ × ଉଚ୍ଚତା × ସମାନ୍ତର ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି)

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_3 - x_1)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_1 + y_2 - y_1 + y_3) - x_2(y_1 + y_2 - y_2 - y_3) + x_3(y_1 + y_3 - y_2 - y_3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right| \quad \text{(ପ୍ରମାଣିତ)}$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 1:

ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହେବ ଏବଂ ବିପରୀତ ପକ୍ଷେ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହେଲେ, ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ ।

ଏଣୁ ଯେକୌଣସି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବାର ଆବଶ୍ୟକ ଓ ଯଥେଷ୍ଟ ସର୍ତ୍ତ (necessary and sufficient condition) ଟି ହେଲା,

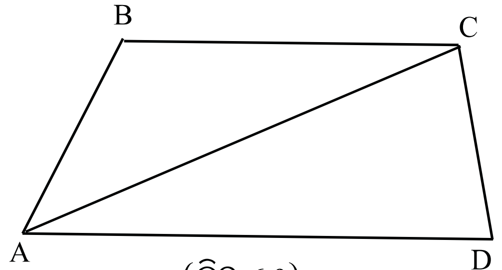
$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 2:

ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହୁଏ ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1]$ ହେବ, ଯେତେବେଳେ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଏବଂ $(0, 0)$ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 3:

ମନେକର ABCD ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଏହାର ଏକ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଆମେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ Δ ABC ଓ ACD ପାଇବା । ତେଣୁ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଉତ୍ପନ୍ନ ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି ।



(ଚିତ୍ର 6.9)

ସୂଚନା : ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟରେ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ, ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏଠାର ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$ କୁ ଏକ 3 x 3 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ,

ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$ ର ଧନାତ୍ମକ ମୂଲ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ – 12: ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1, 3)(–7, 6) ଓ (5, –1) ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫପଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $(x_1, y_1) = (1, 3)$, $(x_2, y_2) = (-7, 6)$, $(x_3, y_3) = (5, -1)$

ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|1\{6-(-1)\} + (-7)(-1-3) + 5(3-6)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(7+28-15)\right| = 10$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 13: ଦର୍ଶାଅ ଯେ, A(1, 2), B(0, 5), C(2, –1) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (0, 5)$, $(x_3, y_3) = (2, -1)$

ABC ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{1}{2}\left|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|1\{5-(-1)\} + 0(-1,-2) + 2(2-5)\right| = \frac{1}{2}\left|(6+0-6)\right| = 0$

ତେଣୁ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 14.

କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A (–2, 1), B (1, 0), C (2, 3) ଓ D (0, 4) ହେଲେ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଆମେ ΔABC ଓ + Δ ACD ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇବା ।

ତେଣୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + Δ ACD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

Δ ABC କ୍ଷେତ୍ରରେ $(x_1, y_1) = (-2, 1)$,

$(x_2, y_2) = (1, 0)$, $(x_3, y_3) = (2, 3)$

Δ ACD କ୍ଷେତ୍ରରେ $(x_1, y_1) = (-2, 1)$,

$(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (0, 4)$

ତେଣୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \frac{1}{2}\left|(-2)(0-3) + 1(3-1) + 2(1-0)\right| + \frac{1}{2}\left|(-2)(3-4) + 2(4-1) + 0(1-3)\right|$

$= \frac{1}{2}|6+2+2| + \frac{1}{2}|2+6+0|$

$= \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 8 = 5 + 4 = 9$ ବର୍ଗ ଏକକ (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}|$

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (c)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ (2,5), (–3,5) ଓ (0,5) ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ----- ହେବ । [–5, 3, 0, 10]

(ii) ଯଦି a = ------ ହୁଏ, ତେବେ (a, –2), (2, 5) ଓ (2, 10) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ । [0, 3, 2, –2]

(iii) y ର ମାନ ----- ପାଇଁ (–2, –2), (0, y) ଓ (3, 3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ । [0, 2, 2, 3]

(iv) k ର ମାନ ----- ପାଇଁ (k, –2), (1, 4) ଏବଂ (–2, 7) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖୀୟ ହେବେ । [3, –3, 2, –2]

(v) a ର ମାନ ----- ପାଇଁ (4, –5), (1, a) ଏବଂ (–2, 7) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ନାହିଁ ।

2. ନିମ୍ନରେ କେତେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦିଆଯାଇଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (3, 0), (4, 5) ଓ (2, 0) (ii) (0,0), (1, 0) ଓ (1, 1)

(iii) (–2, 1), (2, –3) ଓ (4, –4) (iv) (5, 7), (6, 4) ଓ (2, –5)

(v) (5, 2), (–1, 3) ଓ (1, –2)

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(i) (1, 1), (4, 3) ଓ (–2, –1) (ii) (–1, –5), (0, –3) ଓ (4, 5)

(iii) (1, 4), (3, -2) ଓ (-3, 16) (iv) (–4a, –6a), (–a, –2a) ଓ (5a, 6a)

(v) (–a, 2b), (0, b) ଓ $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

4. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(1, -3)$, $(2, -5)$ ଓ $(x, 1)$ ଏବଂ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 4 ବର୍ଗ ଏକକ ହେଲେ, x ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

5. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $(3, -5)$, $(k, 0)$ ଓ $(-4, 7)$ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{95}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ ହେବ ?

6. $(2, 3)$, $(0, 5)$ ଓ $(1, y)$ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିଲେ, y ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

7. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $(2, 3)$, $(3, k)$ ଏବଂ $(5, 9)$ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ?

8. କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ $(1, 1)$, $(3, 5)$ ଓ (x, y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ, ସ୍ଥିର କର ।

9. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(1, 0)$, $(2, 4)$ $(0, 5)$ ଓ $(-2, 1)$ ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(-2, 3)$ $(3, -2)$, $(7, 4)$ ଓ $(1, 5)$ ହେଲେ, ତାହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. Δ ABC ରେ A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(1,1)$ ଓ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $D(-1,-2)$ ଓ $E(3,2)$ ହେଲେ B ଓ C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି Δ ABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

12. $(3, 0)$, $(5, -1)$ ଓ (p, p) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. $(p, 2p)$, $(3p, 3p)$, ଓ $(3, 1)$ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

14. $(x, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖିୟ ହେଲେ x ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

15. (x, y) ବିନ୍ଦୁଟି $(a, 0)$ ଓ $(0, b)$ ବିନ୍ଦୁ ଦୁଇଗୋଟିର ସଂଯୋଗକାରୀ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ।

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (a, b), (a', b') ଓ $(a - a', b - b')$ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକରେଖୀୟ ନୁହଁନ୍ତି ।

17. $A(p+1, 1)$, $B(2p+1, 3)$ ଓ $(2p + 2, 2p)$ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ହେଲେ p ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

18. (x, y), $(3,4)$ ଓ $(-5, -6)$ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ଏକ ରେଖୀୟ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $5x - 4y + 1 = 0$

ଉତ୍ତରମାଳା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1.(i) (–4, 4) (ii) (4,2), (iii) (0,–2), (iv) 4y–1, (v) 2x + 2, (vi) $\frac{1}{2}$(x+3); 2. ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ: (i), (v); ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ: (ii), (iv); ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ : (iii), (vi); 4. (i) 2:1, (ii) 1, (iii) 3, (iv) 12, (v) $\pm\sqrt{6}$; 5.(i) x = 2, y = 2, (ii) x = 1, y = 1, (iii) x = –1, y = 1, (iv) x = 1, y = 1, (v) x=–1, y= –1, (vii) x = 1, y = 4, (viii x = 7, y = –6, (ix) x = 3, y = 2, (x) ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ, (xi) x=1, y = –4, (xii) x = 1, y =1; 6. (iv) $-1, \frac{1}{2}$; 7. (i) $k \neq -6$, (ii) $k \neq -3$, (iii) $k \neq \frac{36}{5}$, (iv) $k \neq 6$, (v) $k \neq \frac{-2}{3}$ (vi) $k \neq 6$; 8.(i) k = 15, (ii) k = 16, (iii) $k = \frac{8}{3}$ (iv) k = 9, (v) $k = \frac{3}{2}$, (vi) $k = \frac{-8}{3}$; 9. (i) k = 16, (ii) k = –15, (iii) k = 2, (iv) k = 3, (v) k = 16, (vi) $k = \frac{-9}{4}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1.(i) (5, 3) (ii) (3,–2), (iii) (1,2), (iv) (2, –3), (v) (1, –1), (vi) (–b, a+b); 2. (i) (4, 1) (ii) (2,1), (iii) $(-\frac{1}{3}, -1)$, (iv) (5, –3), (v) (0,0), (vi) $\left(\frac{bc}{b-a}, \frac{ac}{b-a}\right)$, 3.(i)(3, –2), (ii) (3, –1), (iii) $(-5, \frac{2}{3})$, (iv) (a^2, b^2), (v)(2, –3), (vi) (9,4) ; 4. (i) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, (ii) $\left(\frac{41}{25}, \frac{68}{41}\right)$, (iii) (3, –1), (iv) (3,4), (v) $\left(a+b, \frac{-2ab}{a+b}\right)$, (vi) (a,b), (vii) (3,2), (viii) (2,3), (ix) (3,2), (x) (2,6), (xi) (18,6), (xii) (a,b); 5.(i) –30, (ii) 7, (iii) –20, (iv) $\frac{-13}{20}$; 6. (i) (1,1), (ii) (1,2), (iii) (1,1), (iv) (2,1)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1.90, 47; 2. 4.5 ସେ.ମି.; 3. 88 ବ.ସେ.ମି.; 4. 24, 5. 63 ବା 36; 6. 5 ବା 3; 7. 37; 8. 12, 17; 9. $\frac{7}{9}$, 10. $\frac{12}{25}$; 11. $\frac{3}{2}$ ଟଙ୍କା, $\frac{1}{2}$ ଟଙ୍କା; 12. 36 ବର୍ଷ, 12 ବର୍ଷ ; 13. ଦୈର୍ଘ୍ୟ 17 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 9 ସେ.ମି.; 14. 20 ଦିନ ଓ 30 ଦିନ, 15. 12 ଦିନ ଓ 24 ଦିନ; 16. 6000 ଟଙ୍କା ଓ 5250 ଟଙ୍କା; 17. 40 ବର୍ଷ ଓ 10 ବର୍ଷ; 18. 253 ବ.ମି.; 19. 20, 30; 20. $\frac{2}{7}$.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(a)

1.(i) ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଅଭିନ୍ନ । (ii) ପ୍ରଭେଦକ 1 ଅଟେ ।

(iii) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $-\frac{b}{a}$ (iv) ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{c}{a}$

(v) 1 ଓ –1 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $x^2 - 1 = 0$

(vi) $x^2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ଅଟନ୍ତି ।

(vii) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{2}{3}$ (viii) ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $-\frac{1}{3}$

2.(i) $x^2 + 2x - 15 = 0$, (ii) m = –1 (iii) p = 3, (iv) $c = \frac{1}{4}$ (v) k = – 16, (vi) 5, (vii) $2\sqrt{6}$

3. (i) a (ii) a (iii) b (iv) d (v) c (vi) b (vii) b

4. (i) –3 ଓ 2 (ii) 4 ଓ $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{7}$ ଓ $-\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{3}\left(16+\sqrt{220}\right)$ ଓ $\frac{1}{3}\left(16-\sqrt{220}\right)$

(v) –2p ଓ 3q (vi) $\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ ଓ $-2\sqrt{3}$ (vii) $\frac{-3+\sqrt{2}}{5}$ ଓ $\frac{-3-\sqrt{2}}{5}$ (viii) $\frac{-2b}{a}$ ଓ $\frac{-2b}{3a}$

(ix) $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ (x) –a, (a – b)

5. (i) 2, $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}$, 2 (iii) $\sqrt{2}$, 1 (iv) a, $\frac{1}{a}$ (v) $-\frac{1}{3}, -\frac{-3}{2}$ (vi) –23, $\frac{5}{2}$

(vii) $\frac{2}{3}, \frac{-3}{4}$ (viii) 2, $\frac{-5}{6}$ (ix) $-\frac{4}{3}, \frac{7}{5}$ (x) 8, –8

6. k=3, 7. P= 4, 8. $\frac{15}{4}$, 9. $\frac{11}{2}$, 10. p=2, 12. $\frac{229}{36}$; 13. 2p, 14. m=$\frac{1}{2}$, 2; 16. $x^2–3x – 10 = 0$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. (i) $x^2 – 2x + 1 = 0$ (ii) $y^2 + y – 20 = 0$ (iii) $x^2 – 18x + 72 = 0$ (iv) 0, 1

(v) $n^2+n–240=0$ (vi) $x^2–13x+28=0$,

(vii) $x^2 – 7x = 0$ କିମ୍ବା $t = \sqrt{x+9}$ ହେଲେ $t^2 – t – 12 = 0$ (viii) $x^2–12x+32 =0$

2. (i) 16 (ii) $\frac{5}{4}$ କିମ୍ବା $\frac{4}{5}$ (iii) 5, 6 (iv) 11, 12 (v) 9, 42

3. 24 4. 12 5. 48 କିମ୍ବା 16 6. 5 ସେ.ମି., 7. 15 ସେ.ମି., 8 ସେ.ମି. 8. 12

9. 18 ମି., 12 ମି. 10. 3 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା 11. 5 କି.ମି. / ଘଣ୍ଟା 12. 100

13. 56 ମି. 14. 25 କି.ମି. ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 15. 2.5 ମିଟର 16. 24

17. (i) –6, 1 (ii) 27, $\frac{25}{147}$, (iii) $\frac{1}{4}, \frac{5}{12}$, (iv) $\frac{-3}{4}, \frac{-3}{2}$, (v) $\pm 2, \pm 3$, (vi) –1, 1

(vii) –1,3, $1\pm\sqrt{2}$, (viii) $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$, (ix) 2, $\frac{1}{2}$, (x) $\frac{1}{8}$, (xi) $\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ (xii) 3, $-\frac{3}{2}$

(xiii) –4, 9, (xiv) 1, –1, $\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ (xv) 0, 2 , (xvi) 8, (xvii) 6

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1.(i) 8, (ii) 14, (iii) 13, (iv) 3, (v) 2, (vi) 11, (vii) 0.4, (viii)6, (ix)0.5,, (x) –5; 2. (ii) (vi) ଏବଂ (viii); 3. (ii) 7, (iii) d ଏବଂ (viii) 3; 4. (i) 10, 15, 20, 25, (ii) 9, 13, 17, 21, (iii) 7,9,11,13, (iv) 3, 1, –1, –3, (v) 2, –1, –4, –7; 5. (i) 3, 4.5, 5.5 (ii) 0, 6, 10, (iii) 55, 85, 105, (iv) 14, 26, 34; 6. (i) 7, 10, 13, (ii) –10, –12, –14, (iii) 3, –1, –5, (iv) 15, 20, 25, (v) 2, $\frac{7}{2}$,5, (vi) $-\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}$; 7. T: (a), (d), (e), (f), (i); 8.(a) 465, (b) 100, (c) 240, (d) –15, (e)21, (f) 89, (g) 312, (h) –777, (i) –270, (j) –2800, (k) $\frac{n}{2}$(n+1), (l) $-26\frac{2}{3}$; 9. (a) 210, (b) –493, (c) 1,3,5,7,9 (d) 5,8,11,5795, (e) 3575, (f) $\frac{n}{2}$(1–3n), (g) 29, (h) 21, (i) 5, (j) 102; 10. (i)(a) 5565, (b) 4071,

(c) 18648; (ii) (a) 210, (b) 1275, (iii) 3159, (iv) 2450, (v) 5625; 11. 6 ବା 12; 12.(i) 4.6,8 ବା 8,6,4, (ii) 3,5,7,9,11, 13 ବା 13, 11, 9, 7, 5, 3; 13. 5,7,9 ବା 9,7, 5; 15. 950; 16. 13267; 17. 6,5,4; 18. 3, 5, 7 ବା 7,5,3; 19. 1,3,5,7 ବା 7,5,3,1;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1.(a) $\frac{1}{15}$, (b) $\frac{1}{12}$, (c) $\frac{1}{n}$, (d) $\frac{1}{n+1}$, (e) 7, (f) 3 (g) a (h)15; 2. (a) $\frac{20}{11}$, (b) $\frac{16}{105}$;

3.(a) $5n^2+40n+60$, (b) $n(n+1)(n^2+3n+1)$, (c) $\frac{2n^3+9n^2+4n}{6}$, 3080, (d) n^2+2n, $\frac{2n^3+9n^2+7n}{6}$, 495; 4.(a) $\frac{1}{6}n\ (n+1)(4n-1)$, (b) $\frac{1}{3}(4n^2+6n-1)$ (c) $3n(n+1)(n+3)$ (d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (e) $\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$ (f) $\frac{2}{3}n(n+1)\ (2n+1)$ (g) $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ (h) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$; 5.(i)21 (ii) 19 ଓ 23; 6.(i)20 ଓ 28, (ii) 18, 24 ଓ 30; 7.(i) $\frac{58}{3}$ ଓ $\frac{98}{3}$, (ii) 14, 22, 30 ଓ 38; 8.(i) 20, 35 ଓ 50, (ii) 15, 25, 35,45 ଓ 55; 9. 11; 10. –4, –1, 2, 5 କିମ୍ବା 5, 2, –1, –4

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(a)

1.(i) 0, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) 0.38, (v) $\frac{3}{4}$, (vi) 1, (vii) 0.95; 2. $\frac{8}{15},\frac{7}{15}$; 3. $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$; 4. 0; 5. $\frac{3}{5}$; 6. $\frac{3}{4},\frac{1}{4}$, ସମଷ୍ଟି 1; 7. $\frac{5}{8},\frac{3}{8}$; 8. (i) $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{4}{9}$; 9.(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{7}{12}$; 10. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{5}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(b)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି (i)(iv)(vi)(ix); 2. $\frac{1}{4}$; 3. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{3}$, (iii) $\frac{2}{3}$, (iv) $\frac{5}{6}$, (v) 1, (vi) 0; 4. $\frac{1}{6}$; 5. $\frac{2}{5}$; 6. $\frac{1}{2}$; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $\frac{5}{6}$; 9.(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{4}$, (iv) $\frac{1}{4}$; 10. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{7}{8}$, (iv) $\frac{1}{4}$,(v) $\frac{1}{8}$; 11. (i) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{1}{12}$, (iii) $\frac{1}{18}$ (iv) $\frac{1}{6}$ (v) $\frac{11}{36}$ (vi) $\frac{1}{12}$; 12. 0.9, 0.6; 13. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$; 14. $\frac{4}{11}$; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $\frac{5}{6}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

1. T - (i) (ii) (iii) (vi)(viii); 2. (i) (B) 60, (ii) (B) $10\frac{1}{2}$ (iii) (A) $\frac{n-1}{2}$ (iv) (c) n +1) (v) (B) n, (vi) (D) m + 2 (vii) (C) 4m (viii) (D) (M –x) (ix) (B) $\frac{M}{5}$ (x) (B) $\frac{12a+10b}{a+b}$ (xi) (C) 1000 (xii) (C) 12 (xiii) (A) 0 (xiv) (B) x + 4 (xv) (C) 6.5

3. 42.4, 4. 29.2, 5. 4.17 gm , 6. 30, 8. 49.6; 9. 103.5, 10. 12.24, 11. 151, 10. 43, 12. 49.6, 13(i). 16, 14. $f_1 = 28$, $f_2 = 24$, 15. 40, 16. n = 12, m = 10

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. T - (ii) (v); 2. (i) 7 (ii) 61.5 (iii) 9, (iv) 29; 3.(i) 14, (ii) 4, (iii)34.3; 4. 93.3; 5. 26.25; 6. 28; 7. 7; 8. 25; 9. 36, 8; 10. 30.0 ପ୍ରାୟ, 11. 15, 10, 12. (i) 52.2 (ii) 140

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

1.T : (i); 2. (i) 9, (ii) 10,11, 3. 122, 4. 7, 5. (i) 8, (ii) ଗରିଷ୍ଠକ 6. 5;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(a)

1. (i) 5, (ii) 6, (iii) 10, (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{10}$, (vi) $2\sqrt{a^2+b^2}$; 2. (i) (iii) ଏବଂ (iv) ମୂଳ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । 8. 4; 9.6 କିମ୍ବା –2; 13(2,0); 15. $(2,3+2\sqrt{3})$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(b)

1. (i) –2, (ii) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, (iii) (–2, –3), (iv) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$; 2.(i) (2, 1), (ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, (iii) $\left(\frac{5}{12},\frac{5}{12}\right)$, (iv) $\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$, (v) $\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, (vi) $\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$, (vii) $\left(-\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right)$, (viii) $\frac{a(t_1+t_2)}{2}$, $a(t_1+t_2)$; 3. (i) h = – 4, k = 5, (ii) h = –7, k = 1, (iiii) h = –4, k = 1, (iv) h = $-\frac{1}{4}$, k = $\frac{5}{4}$; 4. (–2, –3); 5. (–4,0); 6. (1, –3); 7. x = 10, y = –7; 8. $\left(\frac{7}{5},\frac{18}{5}\right)$; 9. $\left(1,-\frac{9}{7}\right)$; 10. k = 15; 12. h = –10, k = 4; 13. c(4,0); 15$(4,-\frac{5}{2})$ 16. (3, 4), (5, 3); 20. (i) B(–a, 0), c$(0,\sqrt{3}a)$ (ii) 2a, (iii) $\sqrt{3}a$ (iv) $\left(0,\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(c)

1. (i) 0, (ii) 2, (iii) 0, (iv) 3 (v)1; 2. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 18, (iv) 10.5, (v)14; 4.3; 5.8; 6.4; 7. 5; 8. 2x –y = 1; 9. 11.5 ବର୍ଗ ଏକକ; 10. 32.5 ବର୍ଗ ଏକକ; 11. B(–3, –5), C(5,3), 8 ବର୍ଗ ଏକକ; 12. 0.6; 13. 0 କିମ୍ବା 1; 14. 2; 17. –7 କିମ୍ବା 1 ।